

Fakulteta za pravo in poslovne vede
Dodiplomski študijski program Poslovne vede I

Monika Gorjan

ENOFAKTORSKI MODELI NAPOVEDOVANJA
OBRESTNIH MER: PREGLED MODELOV IN EMPIRIČNA
ANALIZA OBRESTNIH MER Z MERTONOVIM MODELOM

Diplomska naloga

Mentor: doc. dr. Mitja Steinbacher

Ljubljana, 2022

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju, doc. dr. Mitji Steinbacherju, za aktivno vodenje in podporo pri pisanju te diplomske naloge. Zahvala gre tudi Fakulteti za pravo in poslovne vede in vsem njenim sodelavcem, ki so mi predali znanje, predvsem pa v meni prebudili veliko zanimanje po ekonomskih področjih. Zahvaljujem se tudi svoji družini za podporo.

Kazalo

UVOD.....	5
1.1 Opredelitev področja in opis problema	5
1.2 Namen in cilji raziskave.....	5
1.3 Metode raziskovanja	6
1.4 Omejitve raziskave	7
1.5 Temeljne hipoteze raziskave	7
2 VLOGA IN POMEN OBRESTNIH MER	8
2.1 Temeljne opredelitve obrestnih mer.....	9
2.2 Obrestna mera kot dejavnik potrošnje.....	11
2.3 Obrestna mera kot dejavnik investiranja.....	12
2.4 Povezava med obrestnimi merami in zadolževanjem javnih financ	13
2.5 Pojav negativnih obrestnih mer.....	17
3 TEMELJNI MODELI NAPOVEDOVANJA OBRESTNIH MER.....	19
3.1 Enofaktorski Mertonov model	21
3.1.1 Temeljna enačba Mertonovega modela.....	21
3.1.2 Merjenje parametrov Mertonovega modela	23
3.2 Vasicekov model.....	24
3.2.1 Temeljna enačba Vasicekovega modela.....	24
3.2.2 Merjenje parametrov Vasicekovega modela	26
3.3 CIR model	27
3.3.1 Temeljna enačba CIR modela	27
3.3.2 Merjenje parametrov CIR modela	29
4 EMPIRIČNA ANALIZA OBRESTNIH MER Z MERTONOVIM MODELOM.....	30
4.1 Empirično preverjanje modela	30
4.2 Predstavitev podatkov	31

4.3 Rezultati empirične analize	35
4.3.1 Analiza za celotno obdobje gibanja dnevne donosnosti nemške državne obveznice.....	35
4.3.2 Analiza za izbrana pododbojja sprememb v trendu gibanja dnevne donosnosti nemške državne obveznice	36
5 ZAKLJUČNO POGLAVJE.....	41
5.1 Preverjanje temeljnih hipotez.....	41
5.2 Implikacije za nosilce monetarne politike.....	46
6 SKLEP	48
7 REFERENCE.....	50
Povzetek.....	53
Summary	54

UVOD

1.1 Opredelitev področja in opis problema

V diplomski nalogi analiziramo obrestne mere. Obrestne mere pokrivajo široko polje raziskav ekonomske stroke. Vpliv obrestnih mer na gospodarstvo je prepleten in je predmet dolgoletnega raziskovanja različnih področij znotraj ekonomije, kot so: bančni sistem (Samuelson, 1945), donosnost finančnih institucij (Flannery in James, 1984), varčevanje in potrošnja gospodinjstev (Elmendorf, 1996), gospodarska rast (Dotsey, 1998), investicije v nepremičnine (Mueller in Pauley, 1995), inflacija (Alvarez et al., 2001) in druga.

Osrednja vsebina diplomske naloge je povezana z vlogo in pomenom obrestnih mer za gospodarstvo in merjenjem obrestnih mer. Eno osrednjih področij delovanja obrestnih mer predstavljajo potrošniška posojila oziroma potrošnja v splošnem. Analiza vpliva obrestnih mer na potrošnjo sega vsaj do Weberja (1970). Obrestne mere so nerazdružljive z razvojem finančnih trgov. Tukaj je pomembna predvsem njihova vloga kot alokatorja finančnih virov investorjev za potrebe financiranja investicijskih naložb (Mueller in Pauley, 1995), zadolževanja države ipd. Eno prodornejših empiričnih študij vloge in pomena obrestnih mer za državno potrošnjo, cene in javni dolg je opravil Barro (2013).

1.2 Namen in cilji raziskave

V uvodnem delu diplomske naloge želimo prikazati pomen obrestnih mer za gospodarstvo in osvetliti pojav negativnih temeljnih obrestnih mer in njihovo raziskanost v literaturi. Ob tem bomo skušali nakazati tudi na nekatere učinke negativnih temeljnih obrestnih mer za gospodarstvo (Eisenschmidt in Smets, 2018). Razprava o pomenu obrestnih mer za gospodarstvo bo naša podlaga pri izvrševanju osrednjega namena diplomske naloge: osvetliti nekatere temeljne empirične modele

obrestnih mer predvsem skozi zmožnosti zajetja obrestnih mer v obdobjih večjih gospodarskih nihanj. V empiričnem delu diplomske naloge bomo prikazali preprost primer rabe osnovne verzije empiričnega modela obrestnih mer za napovedovanje obrestnih mer na primeru podatkov evrskega denarnega območja.

Skozi razpravo o merjenju obrestnih mer in skozi primer rabe empiričnega modela obrestnih mer bomo nekako skušali zaokrožiti nekaj temeljnih ciljev diplomske naloge. Le – ti so:

1. Prikazati in analizirati nekaj referenčne literature za raziskovanje pomena obrestnih mer za gospodarstvo;
2. Prikazati nekatere osnovne empirične modele merjenja in napovedovanja obrestnih mer. Pri tem bomo osredinjeni na eno faktorske osnovne verzije modelov časovnih serij, ki jih je moč analizirati z uporabo empiričnih metod za analizo časovnih vrst.
3. Pregledati temeljne javno dostopne podatkovne vire, ki lahko služijo za spremljanje spreminjanja obrestnih mer v gospodarstvu, kot so denimo ECB, Banka Slovenije, Eurostat, UMAR ipd.;
4. Zaznati in osvetliti nekatere temeljne dejavnike za pojav negativnih obrestnih mer;
5. Uporabiti empirično metodo za analizo časovnih vrst na Mertonovem (1973) empiričnem modelu napovedovanja obrestnih mer.

1.3 Metode raziskovanja

Uvodni del predlagane diplomske naloge bo opisni. V tem delu bomo predstavili vlogo in pomen obrestnih mer za gospodarstvo s pomočjo standardne literature. Tukaj bomo uporabljali predvsem metode deskripcije, ko bomo opisovali delovanje obrestnih mer ter kompilacije, ko bomo primerjali dognanja različnih avtorjev glede vloge in pomena obrestnih mer za gospodarstvo.

Osrednji del, kjer bomo predstavili nekatere empirične modele merjenja obrestnih mer, bo prav tako opisni, vendar s to razliko, da bo opis nekoliko bolj matematičen. V tem

delu bomo uporabljali metodo matematične analize, ko bomo primerjali modele glede na njihove zmožnosti napovedovanja obrestnih mer.

V tretjem, empiričnem, delu bomo uporabljali metodi dedukcije in indukcije pri postavljanju in preverjanju temeljne hipoteze diplomske naloge. Uporabili bomo podoben pristop, kot sta ga na podatkih za kanadsko gospodarstvo ubrala Mc Manus in Watt (1999), le da bomo namesto metode največjega verjetja uporabili bolj preprosto metodo najmanjših kvadratov. V tem delu bomo predvidoma uporabili tudi metodo zbiranja sekundarnih podatkov in metodo statistične analize, ko bomo predstavili temeljne opisne statistike podatkov, s katerimi bomo prikazali rabo osnovnega Mertonovega empiričnega modela napovedovanja obrestnih mer.

1.4 Omejitve raziskave

Temeljne omejitve se nanašajo predvsem na uporabljeno metodologijo merjenja obrestnih mer in na nekatere temeljne predpostavke metode najmanjših kvadratov, ki jo predvideva empirični del diplomske naloge. Pri javno objavljenih obrestnih merah namreč prihaja vsaj do dveh vrst napak: napak v kakovosti zbiranja podatkov in napak zaradi agregacije podatkov po državah.

1.5 Temeljne hipoteze raziskave

V empiričnem delu naloge bomo poskušali odgovoriti na naslednji temeljni hipotezi:

1. Pričakujemo, da z enofaktorskim Mertonovim modelom ne bomo mogli natančno napovedati obrestnih mer v evrskem denarnem območju v obdobjih večjih gospodarskih nihanj.
2. Pričakujemo, da z enofaktorskim Mertonovim modelom ne bomo mogli napovedati negativnih obrestnih mer evrskega denarnega območja.

2 VLOGA IN POMEN OBRESTNIH MER

Osrednja vsebina diplomske naloge je povezana z vlogo in pomenom obrestnih mer za gospodarstvo in z merjenjem obrestnih mer. Obrestne mere se v svojem jedru izražajo skozi časovni vidik dojemanja potrošnje (vrednosti). Obstaja več vrst in oblik rabe obrestnih mer. V diplomski nalogi bomo usmerjeni v merjenje tako imenovanih tržnih stopenj donosov, kot jih lahko spremljamo na valutnih trgih, na trgih obveznic, na medbančnem trgu, posojilnem trgu in podobnih. Obrestne mere na teh trgih v splošnem odražajo netvegani strošek kapitala, pričakovano inflacijo, premijo za tveganje in transakcijske stroške.

Temeljna značilnost obrestnih mer je njihov vpliv na sedanjo vrednost premoženja. Težko se je opredeliti, ali je vpliv sprememb obrestnih mer pozitiven ali negativen. Na primer, obrestne mere povečajo vrednost realnega razpoložljivega prihodka v času, po drugi strani pa znižujejo sedanjo vrednost premoženja. Tradicionalno pojmujeemo obrestne mere, kot ceno najema denarja. Na banki denimo ob izposoji denarja plačamo nek znesek obresti nad višino izposojene glavnice. Ob tem so lahko obresti vnaprej določene za celotno trajanje dobe vračila posojila (fiksne) ali pa se lahko med trajanjem dobe vračila spreminjajo (variabilne). Najemnik posojila lahko izposojen denar uporabi bodisi za končno potrošnjo ali investicijo. Banki, ki je posojilo izdala pa po drugi strani to predstavlja vir prihodkov za financiranje bančnih operacij. Če se spremeni cena najema denarja za banke (denimo sprememba referenčne obrestne mere centralne banke, sprememba cene najema kapitala na finančnih trgih) bo to pomenilo spremembo stroškov najema denarja za vse komitente, ki se bodo financirali iz tega vira (povečale se bodo fiksne obrestne mere in variabilne obrestne mere). Že iz tega preprostega primera vidimo, da je učinek obrestnih mer na gospodarsko aktivnost lahko zelo kompleksen in nepredvidljiv.

Po drugi strani obrestne mere vplivajo tudi na ceno najema kapitala na finančnih trgih, denimo na trgih obveznic. Imamo vlagatelja A in B, ki želita kupiti obveznice. Vlagatelj A jo kupi danes, vlagatelj B pa še nekoliko počaka. Denimo, da se jutri obrestne mere zvišajo. Vlagatelj B je seveda v boljšem položaju, saj lahko z nakupom te iste obveznice

za manj denarja dobi enak denarni tok, oz. za isti denar dobi več denarnega toka (kupi lahko več obveznic). Če bi se vlagatelju A po dvigu obrestnih mer in posledično padcu cene obveznice dalo možnost izbire med vnovičnim dvigom ali padcem obrestnih mer, bi si ta, v kolikor je racionalen, najbrž zaželel ponovnega dviga obrestnih mer. To bi mu namreč omogočilo pridobitev večjega števila obveznic, posledično večjega denarnega toka za enak denar. Težko je reči, kateri vlagatelj je v prednosti, ker so učinki obrestnih mer v realnosti dosti bolj zapleteni, kot navaja anekdota o vlagateljih A in B.

2.1 Temeljne opredelitve obrestnih mer

V primeru anekdote o vlagateljih iz prejšnjega odstavka smo predpostavljali, da so pritoki iz naslova obveznic razporejeni enakomerno skozi neskončno dolgo obdobje in da začetne obrestne mere ostanejo nespremenjene. Vendar pa Samuelson (1945) poudarja, da je pri vplivu obrestnih mer na današnjo vrednost premoženja treba upoštevati denarne prilive in odlive, ter oboje ustrezno upoštevati pri izračunu sedanje vrednosti premoženja. Preden gremo pogledati temeljne dejavnike obrestnih mer in osvetliti njihovo delovanje malce podrobneje, navajamo nekaj najbolj osnovnih opredelitev obrestnih mer, kot jih tradicionalno pojmuje pri merjenju gospodarske aktivnosti.

Referenčna obrestna mera

Gre za obrestno mero, po kateri monetarne oblasti (ponavadi centralna banka) pogosto v obliki kratkoročnih posojil posoja denar poslovnim bankam znotraj njihovega denarnega območja. Monetarne oblasti s spreminjanjem referenčne (temeljne) obrestne mere, posredno vplivajo na ceno najema denarja pri poslovnih bankah. Nižje kot so referenčne obrestne mere, nižji bodo načeloma stroški najema kapitala pri poslovnih bankah in obratno.

Centralne banke bodo načeloma zvišale obrestne mere, kadar bodo želele znižati stopnjo inflacije v gospodarstvu, kar se načelom zgodi preko znižanja posojilne aktivnosti. Dvig obrestne mere hkrati spodbudi povečanje varčevanja v gospodarstvu, še posebej kadar so obrestne mere višje od inflacije (Mankiw, 2010). Kadar so obrestne mere nižje od

inflacije, v gospodarstvu ni prisotnega motiva po varčevanju, temveč nastajajo pritiski po povečanju količine denarja v obtoku in s tem pritiski na dvig cen v gospodarstvu (prav tam).

Nominalna obrestna mera

Je obrestna mera, kot jo najdemo v pogodbah med posojilojemalci posojilodajalci. Nominalna obrestna mera vključuje pričakovano stopnjo inflacije (Mankiw 2010) v času sklepanja posojilne pogodbe. Lahko jo razumemo tudi kot nominalno donosnost obveznic na finančnih trgih. Torej donosnost, ki vključuje pričakovano inflacijo po predvidevanjih vlagateljev v obveznice. Nominalna obrestna mera se tekom trajanja posojilnega razmerja lahko tudi spremeni (kadar imamo variabilno obrestno mero), prav tako kot se spreminja tudi nominalna donosnost obveznic na finančnih trgih (če držimo obveznico od nakupa do dospelja, bo nominalna donosnost vnaprej znana. Lahko pa obveznico vmes do dospelja prodamo, kar spremeni nominalno donosnost).

Realna obrestna mera

Realna obrestna mera je nominalna obrestna mera zmanjšana za stopnjo inflacije. Izračunamo jo lahko samo za nazaj kadar poznamo stopnjo inflacije. Odraža dejanski odnos posojilodajalca oz. dejanske stroške posojilojemalca. Realno obrestno mero lahko na finančnih trgih razumemo kot realni donos obveznice oz. finančnega instrumenta.

Efektivna obrestna mera

Ko vključimo vse stroške najema posojila ali nakupa obveznice (npr. zavarovanje posojila, stroški odobritve posojila, stroški vrednotenja premoženja pri hipotekarnih posojilih, stroški provizij izdaje obveznic, transakcijski stroški za izvedbo nakupa oz. prodaje obveznice, ipd.) lahko ocenimo efektivno obrestno mero, ki pomeni v resnici plačano ceno najema posojila oz. resničen strošek izdaje obveznice za izdajatelja.

V nadaljevanju prikažemo nekaj temeljnih funkcij obrestnih mer glede na vrsto in obliko njihovega pojavljanja v gospodarstvu.

2.2 Obrestna mera kot dejavnik potrošnje

Eno osrednjih področij delovanja obrestnih mer predstavljajo potrošniška posojila oziroma potrošnja v splošnem. V tem poglavju zato predstavljamo obrestno mero, kot enega izmed pomembnejših dejavnikov na potrošnjo. Analiza vpliva obrestnih mer na potrošnjo sega vsaj do Weberja (1970). Weber (prav tam) ugotavlja, da so obrestne mere pomemben dejavnik agregatne potrošnje. V času Webra je bil učinek obrestnih mer na potrošnjo precej malo raziskan, kljub temu da je bila potrošnja ves čas opredeljena kot pomemben dejavnik v gospodarstvu. Weber je začel z empiričnim raziskovanjem vpliva sprememb obrestnih mer na potrošnjo in sicer tako, da ljudje izberejo potrošnjo glede na največjo lastno korist. Weber ugotovi izrazito močan učinek nominalnih obrestnih mer na agregatno potrošnjo, *ceteris paribus*. Svojo študijo je opravil na podatkih, ki se nanašajo na obdobje med letoma 1930 in 1965 (brez obdobja med 1941 in 1946). Weber je nastavljal svoj matematični model optimalne potrošnje na različnih razponih vrednosti dejavnikov, ki v modelu nastopajo (agregatne obrestne mere, agregatni dohodek od dela in agregatni dohodki iz kapitala), ter ugotovil izrazit pozitiven vpliv povečanja agregatnih obrestnih mer na agregatno potrošnjo. Posebej velja omeniti, da se Webrova analiza vpliva obrestnih mer na agregatno potrošnjo nanaša na obrestne mere kot na donosnost vezanih vlog, varčevalnih računov in podjetniških obveznic. Na ta način delujejo kot neke vrste pokazatelj razmer na posojilno – najemnih trgih.

Campbell in Mankiw (1989) poudarjata obstoj dveh vrst potrošnikov: tisti, ki svojo potrošnjo prilagajajo stalnemu dohodku (permanent income) in tisti, ki svojo potrošnjo vežejo predvsem na trenutni dohodek. Prva skupina potrošnikov za razliko od druge skupine precej manj spreminja potrošnjo glede na spreminjanje obrestnih mer. Ugotovitev je skladna z Webrovo (1970) analizo, ki prikazuje vpliv povečanih obrestnih mer na povečanje kratkoročne potrošnje. To se po avtorjevih ugotovitvah zgodi zaradi pozitivnega učinka obrestnih mer na dohodek, ki bi naj bil večji od učinka zamenjave (substitucije) potrošnje za povečanje varčevanja. Ob nespremenjenih ostalih dejavnikih dvig obrestnih mer odvrta prvo skupino potrošnikov (gospodinjstva) od najemanja posojil (potrošnja se lahko celo zniža) in spodbudi varčevanje. Tako dvig obrestne mere spodbudi varčevanje, kar poveča ponudbo virov financiranja investicij (obveznice,

kreditu). V tej diplomski nalogi bomo obravnavali obrestne mere kot donosnost vrednostnih papirjev v času (ang. yield curve).

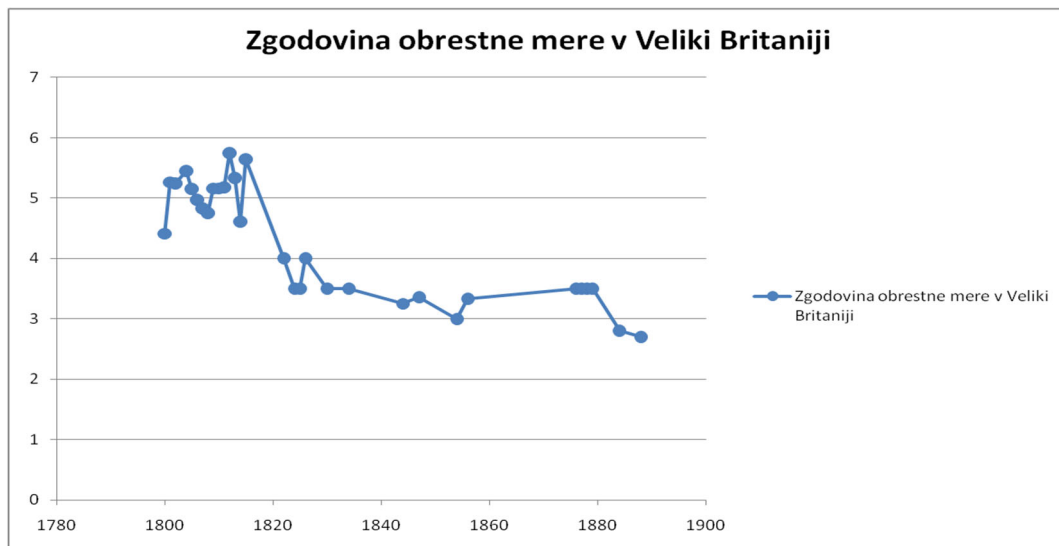
2.3 Obrestna mera kot dejavnik investiranja

Obrestne mere so nerazdružljive z razvojem finančnih trgov. Tukaj je pomembna predvsem njihova vloga kot alokatorja finančnih virov investorjev za potrebe financiranja investicijskih naložb (Mueller in Pauley, 1995), zadolževanja države ipd. Lane in Rosewall (2015) pišeta o pomembnem vplivu obrestnih mer na odločanje podjetij o investiranju, pri tem navajata vpliv obrestnih mer na izračunavanja pričakovanih donosov in vračilne dobe. Raziskave na avstralskih podjetjih kažejo, da podjetniki pogosto zahtevajo precej višje minimalne stopnje donosnosti od stroškov najema kapitala (*obrestna mera + ostali stroški povezani z najemom kredita*). Ob tem zahtevajo tudi kratko povračilno dobo, kar še dodatno povečuje zahtevano stopnjo donosnosti. (prav tam) Vse skupaj se odraža v posrednem vplivu obrestnih mer na investicijske potrošnje. Ne glede na to pa avtorja izpostavita pojav tako imenovanih »živalskih instinktov«, ki lahko imajo ključno vlogo pri odločanju o investiranju. Sorodna analiza avtoric Stawske in Miszczyńske (2017) na podatkih Evropske centralne banke (v nadaljevanju ECB) v obdobju med letoma 1999 – 2016 nakazuje na to, da imajo obrestne mere ECB z zamikom dveh četrtletij inverzno – proporcionalen vpliv na stopnjo investicijske potrošnje, kar navaja na to, da večja kot je obrestna mera manjša je stopnja investiranja. Ta učinek bi naj veljal po analizi avtoric tudi skozi veliko finančno krizo iz leta 2008. Kaj bodo pokazale sorodne analize za obdobje negativnih obrestnih mer, ki je sledilo veliki finančni krizi iz leta 2008, bomo pa še videli. Hall in Jorgenson (1967) v njunem modelu vpliva davkov na investiranje opredelita spreminjanje bruto investicij kot funkcijo vsote tehtanega povprečja preteklih sprememb v zelenem obsegu kapitala in nadomestnih (novih) investicij. Pretekle spremembe v zelenem kapitalu opredelita z razmerjem med obrestno mero in potrebami podjetij po povečanju kapitala glede na spreminjanje obsega proizvodnje (po opredelitvi Cobb – Douglasove funkcije). Obstajajo tudi analize, kot je denimo Bernanke in Gertler (1995), ki trdijo, da se podjetja pri investicijskih odločitvah bolj zanašajo na stroške dela in cene izdelke, kot pa na stroške kapitala. Obrestne mere lahko vplivajo tudi na spreminjanje načinov

investiranja podjetij v nov kapital. Podjetja se namreč odločajo med tem ali firmo dokapitalizirati z novim kapitalom (izdaja delnic) ali z izdajo novega dolga (izdaja obveznic ali pa najem kredita). Obrestne mere namreč lahko vplivajo na to v kolikšni meri se podjetjem splača financirati nove investicije z lastnim denarjem ali denarjem investorjev. Povečevanje obrestnih mer lahko povzroči krčenje bilanc podjetij denimo skozi zmanjševanje denarnih tokov, povečevanje stroškov kratkoročnega financiranja (ohranjanje zalog, izplačevanja dohodkov, nabava materiala) in podobnih dejavnikov, kar je lahko še posebej zahtevno v obdobjih upadanja gospodarske aktivnosti.

2.4 Povezava med obrestnimi merami in zadolževanjem javnih financ

V tem poglavju bomo predstavili pomen obrestnih mer za državno potrošnjo, pri čemer bomo posebej usmerjeni v zadolževanje javnih financ. Eno prodornejših empiričnih študij vloge in pomena obrestnih mer za državno potrošnjo, cene in javni dolg je opravil Barro (2013). Nekoč so državni izdatki pritiskali na povečevanje obrestnih mer predvsem preko stroškov financiranj vojaških spopadov (prav tam). Poglejmo nekoliko podrobneje razvoj gibanja obrestnih mer britanske državne obveznice skozi 19. stoletje. Med letoma 1281 in 1815 (obdobje napoleonskih vojn) zaznamuje visok porast javnega dolga. Po vojni se je zadolževanje močno zmanjšalo, kar se je odrazilo v nižjih obrestnih merah za na novo izdani dolg. Takoj po vojni že leta 1816 so obrestne mere padle iz 5% na 4%. Drugo polovico 19. stoletja zaznamuje nastajanje novih državnih vrednostnih papirjev na finančnih trgih, kar ohranja donosnost nespremenjeno, oz. jo nekoliko znižuje.

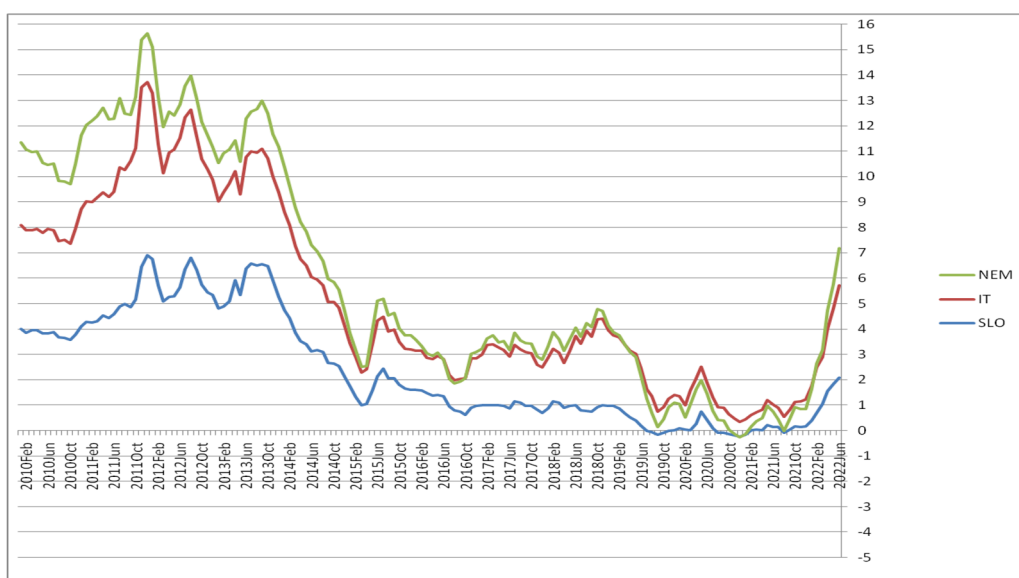


Slika 1: Nove izdaje dolgoročnih obveznic britanske države v 19. stoletju. Slika prikazuje ocenjene donosnosti novih izdaj dolgoročnih obveznic britanske države. Podatki so prevzeti po delu Homer in Sylla, 1996.

Danes je povezava med obrestnimi merami in državnim zadolževanjem precej manj očitna. Zakaj? Danes namreč poteka zadolževanje držav predvsem z izdajanjem dolga na finančnih trgih, za katere pa je značilna visoka stopnja negotovosti glede donosnosti finančnih naložb, potemtakem tudi negotovosti glede stroškov financiranja državnega dolga. Tako denimo Murphy in Walsh (2022) ugotavljata, da empirični podatki za ZDA ne potrjujejo pogosto uporabljenim predpostavkam makromodelov o tem, da povečanje državnih izdatkov vpliva na zviševanje obrestnih mer. Barro (1990) je tukaj nekoliko bolj previden, ko poudari okoliščino, kadar gospodinjstva enačijo davke z javnim dolgom. Ob kratkoročnem povečanju državnih izdatkov se bo nekoliko znižal razpoložljivi dohodek gospodinjstvom, kar bo vplivalo na zmanjšanje agregatne ravni varčevanja v gospodarstvu. Ob nespremenjenih potrebah podjetij po investicijah, lahko pričakujemo dvig obrestnih mer. Ta pritisk na dvig obrestnih mer bo enak ne glede na to, ali se povečana državna potrošnja financira s takojšnjim dvigom davkov ali pa s povečanim zadolževanjem. To še posebej velja, kadar je gospodinjstvom vseeno, ali država financira svojo kratkoročno povečano potrošnjo z novimi davki ali pa s povečanim zadolževanjem.

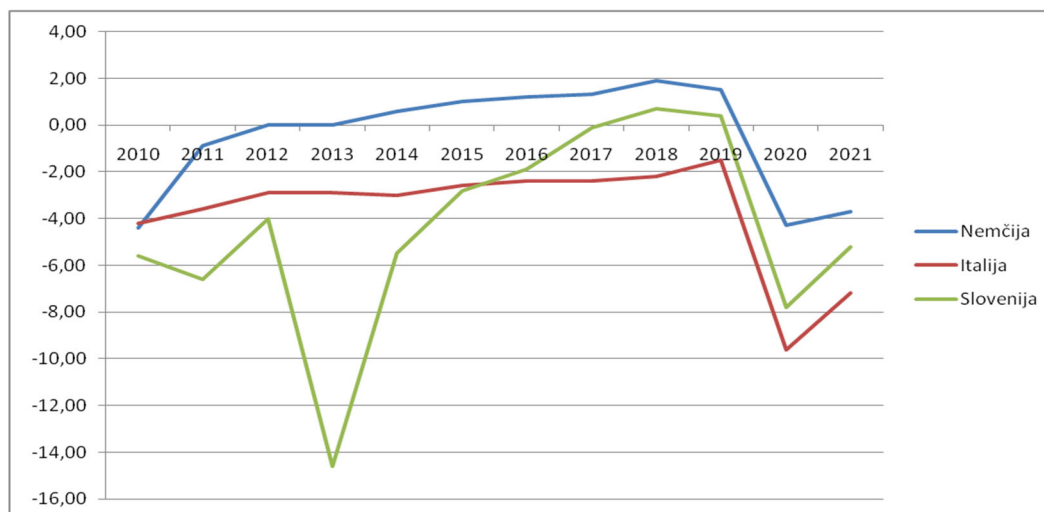
Po ugotovitvah nekaterih avtorjev (Akram in Das, 2017) so kratkoročne obrestne mere pomemben dejavnik dolgoročne donosnosti državnih obveznic. V ekonomski stroki

velja soglasje, da prekomerno državno trošenje izpodriva zasebna vlaganja in zvišuje obrestne mere državnih vrednostnih papirjev. Domneva se namreč, da bodo vlagatelji v državne vrednostne papirje zahtevali večjo donosnost od tistih držav, ki so bolj zadolžene. Ob tem Reinhart in Rogoff (2009) opozorita na to, da negativne vplive prekomernega državnega zadolževanja na gospodarsko rast, povečano inflacijo in večjo verjetnost državnega bankrota, torej ne zmore poravnati tekočih obveznosti iz naslova izdanih obveznic.



Slika 2: Donosnost desetletnih evrskih obveznic Slovenije, Nemčije in Italije. Nemške, italijanske in slovenske desetletne državne obveznice izdane v evrih. Vir podatkov: ECB (2022).

Kot lahko vidimo iz zgornjega grafa, je donosnost desetletnih evrskih državnih vrednostnih papirjev Nemčije, Italije in Slovenije v obdobju med letoma 2011 in 2015 močno upadla. To kaže na pripravljenost vlagateljev po investiranju v državne vrednostne papirje po slabših pogojih kot prej.



Slika 3: Delež javnega dolga v BDP. Letni podatki o neto proračunskem primanjkljaju Slovenije, Italije in Nemčije izraženi kot delež BDP v odstotkih. Vir podatkov: Eurostat, 2022.

Spomnimo se nedavne velike finančne krize, ki se je leta 2008 začela v ZDA na sekundarnem trgu nepremičnin in se potem preko stečaja investicijske banke Lehman brothers' prenesla v evropski bančno – finančni sistem in doprinesla k potrebi po dodatnem zadolževanju javnih financ v evropskem gospodarstvu. Izrazito povečanje javnega dolga v deležu BDPja v nekaterih državah evroobmočja časovno sovpada z začetkom omenjene finančno – bančne krize.

Povečano zadolževanje predstavlja neke vrste turbolenco na trgu državnih vrednostnih papirjev v kateri se je znašlo celotno evrsko območje. Kriza se je podaljšala v krizo zadolževanja javnih financ, ki je trajala vse od poznega leta 2010 pa do pričetka leta 2014. Kriza javnih financ je bila še zlasti izrazita v Grčiji, Italiji, Španiji, na Portugalskem in Irskem. Posledica te krize zadolževanja je bil izrazit porast negotovosti med vlagatelji v vlaganje v državne vrednostne papirje, kar lahko na sliki vidimo kot porast donosnosti obveznic omenjenih držav v tem obdobju (čez 30%). Od sredine leta 2014 pa do danes smo priča pojavu, ko se mnoge države evrskega denarnega območja zadolžujejo po negativnih obrestnih merah. To je spodbudilo nov val državnega zadolževanja tudi v Nemčiji, ki je zabeležila javni primanjkljaj v letu 2020 (glej zgornjo sliko).

Konec leta 2019 je zaznamoval pričetek dveletnega obdobja pandemije v katerem so se države pričele zadolževati tudi neposredno pri Evropski centralni banki po negativnih obrestnih meri. V sliki vidimo, da so leta 2020 Slovenija, Italija in Nemčija zabeležile velik proračunski primanjkljaj. Tokratni val povečanega zadolževanja se je pojavil predvsem za potrebe financiranja politik za nadomeščanje izgubljenega dohodka v panogah, ki so bile prizadete ob pojavu pandemije koronavirusa. Države so se večinoma s to okoliščino soočale na način zapiranja gospodarstev (lockdown) in nadomeščanjem dohodkov v zaprtih panogah. Videti je, kot da je sedaj povezava med obrestnimi merami in javnim dolgom obratna od tiste, ki smo jo zaznali pri veliki finančni krizi iz leta 2008. Če lahko za finančno krizo ugotovimo, da povečano državno zadolževanje vpliva na dvig obrestnih mer, potem nam obdobje med pandemijo koronavirusa daje primer, ko je denarna politika najprej vzpostavila izrazito nizke obrestne mere, ki so privedle do negativnih obrestnih mer državnih vrednostnih papirjev in s tem povečali spodbude po zadolževanju držav. Na bolj natančne analize s tem v zvezi bo potrebno še počakati.

Če se vrnemo na začetek bi lahko pritrdili ugotovitvam iz prispevka avtorjev Akrama in Dasa (2017) o vplivu referenčne obrestne mere (t.j. obrestna mera po kateri centralna banka izdaja denar bankam) centralne banke in deleža javnega dolga v BDP na dolgoročno raven obrestnih mer državnih obveznic. Vplivi so med seboj zelo prepleteni in kažejo na omejeno zmožnost centralne banke za vpliv na dolgoročno obrestno mero državnih vrednostnih papirjev.

2.5 Pojav negativnih obrestnih mer

Za stimuliranje gospodarstev po veliki finančno gospodarski krizi iz leta 2008 so se pri ECB odločili uvesti politiko negativnih obrestnih mer. Razloge so videli predvsem v zagotavljanju dodatne likvidnosti gospodarstvu, za spodbujanje gospodarske rasti in povrnitve k ciljni stopnji inflacije (2%). Teorija pravi, da bi naj negativne obrestne mere ugodno vplivale na poslovanje bank zaradi povečanja povpraševanja po posojilih, kar bi se naj odrazilo v boljših bilancah bank. Po drugi strani pa bi lahko negativne obrestne mere privabljale bolj tvegane komitente oz. posojilojemalce k najemanju

kreditov, kar lahko ima negativen učinek na kvaliteto bilanc bank. Za voljo nizkih donosnosti posojilne aktivnosti za banke, bi se lahko nekatere odločile iskati donos tudi v bolj tveganih naložbah. Tako bi lahko negativne obrestne mere ogrozile stabilnost bančnega sistema.

Evropska centralna banka je v juniju leta 2014 znižala stopnjo obrestne mere na kratkoročne depozite pri centralni banki (preko noči) za 10 bazičnih točk. Ta ukrep je pomenil, da so morale banke ECB plačati, če so želele pri njej hraniti svoj višek denarja. Ta odločitev je po mnenju Eisenschmidta in Smetsa (2019) pomenila del obsežnega paketa politike povečanja denarja v obtoku (monetarno sproščanje), ki je postopoma vključevalo tudi dolgoročnejše operacije refinanciranja (TLTRO = targeted long – term refinancing operations) in obsežnih programov nakupov javnega in zasebnega premoženja (APP = asset purchase programme). ECB je nadaljevalo z zniževanjem stopenj obrestnih mer na kratkoročne depozite vse do stopnje -0,5 leta 2019.

Vpeljava politike negativnih obrestnih mer (prav tam) nima enoznačnega učinka na povečanja obsega kreditne aktivnosti bank, kar je bil eden od domnevnih ciljev ECB, saj so bili sočasno vpeljani tudi ukrepi, ki so močno znižali dolgoročne donose predvsem državnih obveznic. Po drugi strani pa je preko dolgoročnih programov refinanciranja ECB omogočala bankam dostop do poceni dolgoročnih virov financiranja (tudi po negativnih obrestnih merah). Določene države izven evrskega območja (Danska in Švica) so uvajale politiko nizkih obrestnih mer za zaščito lastnih valut pred prevelikim naraščanjem (prav tam).

Negativne obrestne mere so redek pojav, zato je učinke tovrstne politike težko predvideti. Nucera et al. (2017) denimo ugotavljajo, da je učinek negativnih obrestnih mer na nagnjenost bank k podkapitaliziranosti (stanje, ko imajo banke premalo denarja glede na obseg njenih aktivnosti) je zmeren in odvisen od narave poslovanja bank. Banke z večjo razpršenostjo virov financiranja bodo lažje zagotovile ustrezno raven kapitala od bank, ki svoje operacije financirajo predvsem iz denarnih vlog oz. depozitov. Politika negativnih obrestnih mer ima tako povsem različen vpliv na delovanje vsake banke posebej.

3 TEMELJNI MODELI NAPOVEDOVANJA OBRESTNIH MER

V tem poglavju predstavljamo nekatere temeljne značilnosti osnovnih modelov merjenja obrestnih mer. Osredotočeni bomo na merjenje ti. netveganih obrestnih mer (obrestne mere, ki se nanašajo na netvegane vrednostne papirje AAA, načeloma državne obveznice). Skupini v tej diplomski nalogi obravnavanih modelov je skupno, da z njimi analiziramo gibanje kratkoročnih obrestnih mer.

V analitskem delu diplomske naloge v poglavju po predstavitvi temeljnih modelov merjenja kratkoročnih obrestnih mer se bomo osredotočili na empirično analizo Mertonovega modela, ki sodi med osnovne modele merjenja kratkoročnih obrestnih mer. Obsežno primerjalno analizo več vrst modelov napovedovanja kratkoročnih obrestnih mer so opravili avtorji Chan et al. (1992). S primerjavo so skušali pojasniti donosnost enomesečnih ameriških državnih obveznic. Ena izmed njihovih ugotovitev je tudi ta, da so za napovedovanje kratkoročne dinamike boljši tisti modeli, ki dovoljujejo odvisnost nihanja obrestnih mer tudi od ravni obrestne mere (obrestna mera nastopa v modelu kot pojasnjevalna spremenljivka). Nihanje obrestnih mer bi naj bila po njihovih ugotovitvah pozitivno povezana od ravni obrestne mere.

Modeli napovedovanja kratkoročnih obrestnih mer imajo enotno splošno strukturo. Zapis strukture sem med avtorji razlikuje. V tej diplomski nalogi sledimo okvirju avtorjev McManus in Watt (1999).

Splošen okvir avtorja (prav tam) definirata takole:

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r^\gamma dz, \quad (1)$$

kjer parametri pomenijo naslednje: r je kratkoročna obrestna mera, z pa se giblje po geometričnem Brownovem procesu. Značilnosti Brownovega procesa v tej nalogi ne

obravnavamo, saj bi to preseglo naš namen. Opišemo ga le do minimalne mere, kot je potrebna za namene diplomske naloge.

Kot lahko vidimo iz enačbe 1, sta tako stalen učinek (trend) na spremembo obrestne mere $\alpha + \beta r(t)$ kot nestalen (nihanje okoli trenda) odvisna od stopnje obrestne mere v času $r(t)$. Avtorja pokažeta, kako lahko iz tega okvirja izpeljemo več standardnih modelov merjenja dinamike spreminjanja kratkoročni obrestnih mer in jih predložita v tabelarnem prikazu (tabela 1):

MODEL	ENAČBA	OMEJITVE PARAMETROV ¹
Mertonov model (Merton, 1973)	$dr = \alpha dt + \sigma dz$	$\beta = 0, \gamma = 0$
Vasicekov model (Vasicek, 1977)	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma dz$	$\gamma = 0$
CIR model (Cox et al., 1985)	$dr = (\alpha + \beta r)dt + \sigma r^{\frac{1}{2}}dz$	$\gamma = \frac{1}{2}$

Tabela 1: Modeli kratkoročnih obrestnih mer. Tabela je prirejena po avtorjih Mc Manus in Watt, 1999.

Prvi model iz tabele je bil uporabljen za izpeljavo standardne Mertonove enačbe za ocenjevanje vrednosti obveznic. Gre za osnovni model, ki netvegano obrestno mero opredeljuje kot enostavno Brownovo gibanje z »driftom« (stalen učinek v času, ki opredeljuje smer spreminjanja obrestne mere: alfa + beta). Druga enačbo iz tabele je razvil Vasicek pri izpeljavi njegovega dopolnjenega modela za ocenjevanje vrednosti obveznic. Gre za zelo priljubljen primer Gaussovega naključnega procesa, ki se veliko uporablja za vrednotenje vrednostnih papirjev. Tretjo enačbo iz tabele so izpeljali avtorji Cox et al. (1985) in se uporablja pri razvoju modelov za ocenjevanje vrednostnih papirjev, ki so občutljivi na spreminjanje obrestnih mer. V nadaljevanju na kratko prikazujemo temeljne značilnosti teh treh modelov iz tabele 1.

¹ Omejitve parametrov se navezujejo na splošno obliko modela, enačba (1).

3.1 Enofaktorski Mertonov model

3.1.1 Temeljna enačba Mertonovega modela

Temeljna matematična enačba Mertonovega modela je:

$$dr(t) = \alpha dt + \sigma dz, \quad (2)$$

kjer parametri pomenijo naslednje: r je kratkoročna obrestna mera, $dr(t)$ je sprememba kratkoročne obrestne mere v času t , α je nek stalen »drift« oziroma »potisk« v času t , z pa je nek naključen vpliv in se giblje po Wienerjevem procesu². Celotno enačbo imenujemo geometrično Brownovo gibanje³ z »driftom« oziroma s »potiskom«. Spreminjanje vrednosti naključnega dejavnika z je v Wienerjevem procesu opredeljeno s standardizirano, normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko. Enačba spremembe vrednosti spremenljivke z v Wienerjevem procesu:

$$(z_{t+u} - z_t) \sim N(0, u). \quad (3)$$

V enačbi (2) α v resnici predstavlja stopnjo pričakovanega donosa v daljšem časovnem obdobju (pričakovana vrednost Wienerjevega procesa je namreč enaka 0). Pri uporabi modela za vrednotenje državnih obveznic lahko α razumemo kot nominalno kuponsko donosnost od izdaje obveznice do njenega dospelja. Vidimo, da je Mertonov model odvisen od nekega stalnega »brezčasnega« (v vsaki časovni enoti je enak) vpliva α in kot tak sodi v skupino naključnih procesov brez spomina, kar pomeni, da preteklost ne vpliva na sedanjost (včerajšnja obrestna mera ne vpliva na današnjo obrestno mero).

² Več o osnovah Wienerjevega procesa najde zainteresiran bralec v spletni enciklopediji Wikipediji (Wikipedia, 2022a)

³ Več o osnovah geometričnega Brownovega procesa z driftom najde zainteresiran bralec v spletni enciklopediji Wikipediji (Wikipedia, 2022b)

Merton je pri svojem modelu vrednotenja finančnih instrumentov uporabil stalen »drift« α , ki nastopa kot element, ki vsebuje temeljne dejavnike, ki se v času manj spreminjajo. Kakršnokoli napovedovanje sedanje vrednosti prihodnjih donosov finančnih instrumentov zahteva oceno donosnosti za vsako časovno enoto (obrestne mere razumemo v tem primeru kot donosnost). Spomnimo se primera iz uvoda vlagateljev A in B. Lahko si predstavljamo zahtevnost njunega odločanja o nakupih državnih obveznic v okolju zelo »nestabilnih obrestnih mer« oz. nestabilnega gospodarstva. Navadno so obrestne mere za državne obveznice precej manj volatilne od obrestnih mer drugih vrst dolžniških vrednostnih papirjev.

Pojasnimo na namišljenem primeru gibanje kratkoročne donosnosti netveganih desetletnih državnih obveznic v Mertonovem modelu v času $t = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Denimo, da smo s pomočjo ustrezne metode empirične analize ocenili vrednost parametrov Mertonovega modela: $\alpha = 0.03$, $\sigma = 0.0025$. Denimo tudi, da znaša trenutna netvegana stopnja donosnosti tega istega vrednostnega papirja $r(0) = 0.01$. S pomočjo teh parametrov lahko ocenimo stopnjo netvegane donosnosti vse do dospelosti netvegane obveznice na sledeč način. Najprej ocenimo spremembo netvegane donosnosti v času $t = 0$:

$$dr(t = 0) = 0.03dt + 0.0025dz$$

Za dokončen izračun nam manjka stohastična sprememba dz , ki predstavlja Wienerjev proces. Vrednost spremembe je naključna in se med obdobji neodvisno spreminja po:

$$dz \sim N(0, dt)$$

Za pridobitev vrednosti dz si lahko pomagamo z različnimi računalniškimi programi (Excel, R – Studio, ipd.). Denimo, da nas zanima sprememba za eno časovno obdobje ($dt = 1$) in, da znaša vrednost stohastične spremembe $dz = -0.12$ v tej časovni enoti. Potemtakem bi ocenjena vrednost pričakovane spremembe stopnje netvegane donosnosti iz časa $t = 0$ na čas $t = 1$ znašala:

$$dr(t = 0) = 0.03 \times 1 - 0.0003 = 0.0297.$$

S pomočjo Mertonovega modela ocenjena sprememba donosnosti netvegane obveznice iz časa $t = 0$ na čas $t = 1$ bi ob zgornjih pogojih znašala 0,0297, torej bi napovedana donosnost v času $t = 1$ bila:

$$r(t = 1) = r(t = 0) + dr(t = 0) | dt = 1$$

$$r(t = 1) = 0,01 + 0,0297$$

$$r(t = 1) = 0,0397$$

Postopek izračunavanja se nadaljuje vse do dospelosti obveznice, na katero se nanaša ocena parametra v modelu (10 let). Kot lahko vidimo, razvoj spremembe donosnosti v prihodnosti ni vezan na začetno raven obrestnih mer v času $t = 0$, medtem ko sama donosnost na začetku merjenja vpliva na donosnosti v ostalih obdobjih napovedovanja. Vpliv začetne ravni obrestne mere v času $t = 0$ na spremembo obrestne mere v nekem času $dr(t)$ je odvisen samo od parametra α , ki v resnici predstavlja ocenjeno pričakovano donosnost obveznice. Medtem ko stohastični vpliv poskrbi za nihanje stopnje donosnosti okrog pričakovane stopnje donosnosti, kot jo opredeljuje α (»drift«). Enačba Mertonovega modela navaja k temu, da kratkoročna obrestna mera teče po Brownovem gibanju in ji s tem daje nekatere temeljne lastnosti:

- Izvorna obrestna mera daleč nazaj v nekem izhodišču $t = 0$ znaša $r(0) = 0$;
- Spremembe v obrestnih merah so neodvisne druga od druge. Denimo za neko sosledje časovnih enot $0 \leq a < b \leq t < c$, bo sprememba v obrestni meri $r(b) - r(a)$ neodvisna od spremembe v obrestni meri $r(c) - r(t)$;
- Za neko časovno sosledje $0 \leq c < t$ bo $r(t) - r(c)$ normalno porazdeljena s pričakovano vrednostjo 0 in varianco $(\sigma^2 = t - c)$, kot sledi $[r(t) - r(c)] \sim N(0, t - c)$ in
- Kratkoročna obrestna mera r je v času zvezna spremenljivka.

3.1.2 Merjenje parametrov Mertonovega modela

V tem poglavju na kratko predstavljamo temeljne značilnosti pristopa merjenja parametrov Mertonovega modela, kakršnega bomo uporabili kasneje v poglavju 4. Za empirično preverjanje bomo uporabili diskretno verzijo enačbe Mertonovega modela. Diskretna verzija enačbe modela, primerna za empirično analizo, je

$$r(t) = r(0) + \alpha(T - t) + \varepsilon(t) \quad (4)$$

oziroma za poljuben začetni čas t v podobdobju $0 \leq t \leq T$:

$$r(T) = r(t) + \alpha(T - t) + \varepsilon(T - t). \quad (5)$$

Simboli v enačbah (4) in (5) pomenijo: $r(T)$ obrestno mero v času T , $\varepsilon(T)$ normalno porazdeljen stohastičen šum s pričakovano vrednostjo $E(\varepsilon(T - t)) = 0$ in s standardnim odklonom $\sigma\sqrt{T - t}$, kjer je σ standardni odklon v stopnjah sprememb obrestnih mer $dr(s)$ skozi celotno obdobje opazovanja $t < s \leq T$. Enačbi (4) in (5) lahko preverjamo s standardnimi metodami za ocenjevanje trenda z nekim naključnim nihanjem okrog trenda. Model po enačbi (5) bo stvar preverjanja te diplomske naloge.

3.2 Vasicekov model

3.2.1 Temeljna enačba Vasicekovega modela

Gre za nadgradnjo enofaktorskega Mertonovega modela. Vasicek dopolni Mertonov model tako, da »drift« oz. potisk opredeli ne le z nekim stalnim učinkom v času (kot je α v primeru Mertonovega modela), temveč tudi s stopnjo obrestne mere r v času t ($\alpha + \beta r(t)$).

Matematična enačba Vasicekovega modela je:

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma dz, \quad (5)$$

kjer parametri pomenijo naslednje: r je kratkoročna obrestna mera, z pa se giblje po geometričnem Brownovem procesu. Ta model je bolj fleksibilen od Mertonovega modela, vendar ga je tudi težje empirično preveriti (ocenjevanje parametrov α in β).

Kot lahko vidimo v enačbi (5), Vasicekov model dovoljuje odvisnost kratkoročnega nihanja obrestnih mer tudi od ravni obrestne mere $r(t)$, torej lahko od tega modela pričakujemo nekoliko natančnejše napovedovanje kratkoročnih nihanj v obrestnih merah od zgoraj na kratko opisanega Mertonovega modela.

Na podoben način kot v primeru Mertonovega modela na kratko prikažimo gibanje donosnosti netveganih desetletnih državnih obveznic v Vasicekovem modelu v času $t = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ na naslednjem primeru. Denimo, da smo s pomočjo ustrezne metode empirične analize ocenili vrednost parametrov Vasicekovega modela: $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.75$, $\sigma = 0,0025$. Denimo tudi, da znaša trenutna netvegana stopnja donosnosti tega istega vrednostnega papirja $r(0) = 0,01$. S pomočjo teh parametrov lahko ocenimo stopnjo netvegane donosnosti vse do dospelosti netvegane obveznice na sledeč način. Najprej ocenimo spremembo netvegane donosnosti v času $t = 0$:

$$\begin{aligned} dr(t = 0) &= (0,02 + 0,75 \times 0,01)dt + 0,0025dz \\ dr(t = 0) &= 0,0275dt + 0,0025dz. \end{aligned}$$

Za dokončen izračun nam manjka stohastična sprememba dz , ki je enaka kot v Mertonovem modelu in predstavlja Wienerjev proces. Vrednost spremembe je naključna in se med obdobji neodvisno spreminja po:

$$dz \sim N(0, dt)$$

Za pridobitev dz si lahko pomagamo z različnimi računalniškimi programi (Excel, R – Studio, ipd.). Denimo, da nas zanima sprememba za eno časovno obdobje ($dt = 1$) in, da znaša vrednost stohastične spremembe $dz = -0,12$ v tej časovni enoti. Potemtakem bi vrednost spremembe stopnje netvegane donosnosti iz časa $t = 0$ na čas $t = 1$ znašala:

$$dr(t = 0) = 0,0275 \times 1 - 0,0003 = 0,0272.$$

S pomočjo Vasicekovega modela ocenjena sprememba donosnosti netvegane obveznice iz časa $t = 0$ na čas $t = 1$ bi ob zgornjih pogojih znašala 0,0469, torej bi napovedana donosnost v času $t = 1$ bila:

$$r(t = 1) = r(t = 0) + dr(t = 0) | dt = 1$$

$$r(t = 1) = 0,01 + 0,0272$$

$$r(t = 1) = 0.0372$$

Postopek izračunavanja se nadaljuje vse do dospelosti obveznice, na katero se nanaša ocena parametra v modelu (10 let). Kot lahko vidimo je razvoj donosnosti (obrestnih mer) v prihodnosti vezan na začetno raven obrestnih mer v času $t = 0$. Vpliv začetne ravni obrestne mere v času $t = 0$ na spremembo obrestne mere v nekem času t ($dr(t)$) je odvisen od parametra β . V kolikor bo β večja od 0 in manjša od 1, bo ta učinek pozitiven in bo sčasoma kopnel. Kadar bo β negativna, med -1 in 0, bo učinek negativen in bo prav tako v času kopnel. β na dolgi rok ne more biti večja od 1 in manjša od -1, saj bi to pomenilo naraščajoč vpliv začetne ravni obrestne mere v času in bi obrestna mera v neskončnost eksplodirala. Stohastični vpliv skrbi za nihanje stopnje donosnosti okrog pričakovane stopnje donosnosti, ki jo opredeljuje »drift».

3.2.2 Merjenje parametrov Vasicekovega modela

V tem poglavju na kratko predstavljamo temeljne značilnosti pristopa merjenja parametrov Vasicekovega modela. Predstavitev bo kratka in zgolj opisna. Jedro našega opisa temelji na članku avtorjev Chan et al. (1992) ter na magistrskih nalogah Zhang (2012) in Štampar (2020). Vasicekov model je moč oceniti s pomočjo različnih empiričnih metod, kot so denimo metoda najmanjših kvadratov, generalizirana metoda momentov (GMM) ali metoda največjega verjetja (MNV). Omenjenih metod v tej diplomski nalogi ne bomo posebej obravnavali, saj bi s tem presegli naš namen.

Na tem mestu omenjamo možnost ocenjevanja temeljne enačbe Vasicekovega modela z metodo najmanjših kvadratov. Z metodo najmanjših kvadratov lahko preverimo poenostavljeno empirično enačbo Vasicekovega modela:

$$r(t) = \alpha + r(t-1) \times \beta + \varepsilon(t). \quad (6)$$

Parametri v enačbi (6) pomenijo enako, kot v enačbi Vasicekovega modela (5), s to razliko, da ε sedaj predstavlja normalno porazdeljeni naključni šum s pričakovano vrednostjo 0. V tem primeru gre za enačbo časovne vrste z avtokorelacijo prvega reda. To pomeni, da nam na obrestno mero v času t vpliva obrestna mera v predhodnem obdobju $t-1$. Enačbo lahko preverjamo z različnimi metodami za ocenjevanje modelov s prisotno avtokorelacijo najmanj prvega reda (AR modeli).⁴

3.3 CIR model

3.3.1 Temeljna enačba CIR modela

Avtorji CIR modela so Cox, Ingersoll in Ross (1985), pogosto pa ga imenujemo kar proces kvadratnega korena (angl.: square – root process). Avtorji so ta model spreminjanja stopnje donosnosti v času t uporabili v njihovi enačbi za ravnovesno stopnjo donosnosti. Njihova ravnovesna stopnja donosnosti se široko uporablja v različnih modelih vrednotenja izvedenih finančnih instrumentov (pogojnih terjatev (ang. contingent claims), kot so denimo hipotekarni vrednostni papirji (CDO – ji in CMO – ji, opcijski vrednostni papirji, SWAP vrednostni papirji). Matematična enačba CIR modela je:

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r(t)^{\frac{1}{2}}dz, \quad (7)$$

⁴ Modele avtokorelacije p-tega reda imenujemo AR(p) modeli. Z analizo teh modelov se ukvarjamo znotraj ekonometrije časovnih serij. Zainteresiranega bralca usmerjamo na temeljne učbenike s področja empirične analize časovnih serij, kot je denimo Hamilton (1994).

kjer parametri pomenijo enako kot v Vaiseckovem modelu po enačbi (3). Ta model je bolj fleksibilen od Mertonovega modela, vendar ga je tudi težje empirično preveriti (ocenjevanje parametrov α in β). Iz enačbe (4) lahko sklepamo na to, da bo pogojna varianca spreminjanja stopnje donosnosti r , v linearnem sorazmerju s stopnjo donosnosti r . Modeli po enačbah (2 – 4) lahko predpostavijo različne porazdelitve po katerih se spreminja r v času t . Tako denimo model po enačbi (2) in enačbi (3) predpostavljata, da se r spreminja po normalni porazdelitvi, medtem ko to v modelu (4) temu ni nujno tako (Chan et al., 1992).

Kot lahko vidimo v enačbi (4), tudi CIR model dovoljuje odvisnost kratkoročnega nihanja obrestnih mer tudi od ravni obrestne mere $r(t)$, vendar je za razliko od Vasicekovega modela $r(t)$ v tem primeru tudi dejavnik spreminjanja volatilitnosti v stopnji nihanja (ne samo »drifta«). Od tega modela lahko pričakujemo nekoliko natančnejše napovedovanje kratkoročnih nihanj v obrestnih merah kot v Mertonovem modelu.

Na podoben način kot v primeru Mertonovega in Vasicekovega modela na kratko prikažimo gibanje donosnosti netveganih desetletnih državnih obveznic v CIR modelu v času $t = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ na naslednjem primeru. Denimo, da smo s pomočjo ustrezne metode empirične analize ocenili vrednost parametrov CIR modela: $\alpha = 0.02$, $\beta = 0.75$, $\sigma = 0,0025$. Denimo tudi, da znaša trenutna netvegana stopnja donosnosti tega istega vrednostnega papirja $r(0) = 0,01$. S pomočjo teh parametrov lahko ocenimo stopnjo netvegane donosnosti vse do dospelosti netvegane obveznice na sledeč način. Najprej ocenimo spremembo netvegane donosnosti v času $t = 0$:

$$dr(t = 0) = (0,02 + 0,75 \times 0,01)dt + 0,0025 \times \sqrt{r(t = 0)}dz$$

$$dr(t = 0) = 0,0275dt + 0,0025 \times \sqrt{0,01}dz.$$

Za dokončen izračun nam manjka stohastična sprememba dz , ki je enaka kot v prejšnjih modelih in predstavlja Wienerjev proces. Denimo, da nas zanima sprememba za eno časovno obdobje ($dt = 1$) in, da znaša vrednost stohastične spremembe $dz = -0,12$ v tej časovni enoti. Potemtakem bi vrednost spremembe stopnje netvegane donosnosti iz časa $t = 0$ na čas $t = 1$ znašala:

$$dr(t = 0) = 0,0275 \times 1 + 0,1 \times 0,0025 \times (-0,12) = 0,02747.$$

S pomočjo CIR modela ocenjena sprememba donosnosti netvegane obveznice iz časa $t = 0$ na čas $t = 1$ bi ob zgornjih pogojih znašala 0,02747, torej bi napovedana donosnost v času $t = 1$ bila:

$$r(t = 1) = r(t = 0) + dr(t = 0) | dt = 1$$

$$r(t = 1) = 0,01 + 0,02747$$

$$r(t = 1) = 0.03747$$

Postopek izračunavanja se nadaljuje vse do dospelosti obveznice, na katero se nanaša ocena parametra v modelu (10 let). Kot lahko vidimo je razvoj donosnosti (obrestnih mer) v prihodnosti vezan na začetno raven obrestnih mer v času $t = 0$. Vpliv začetne ravni obrestne mere v času $t = 0$ na spremembo obrestne mere v nekem času t ($dr(t)$) je odvisen od parametra β in od volatilnosti σ . Kljub temu, da gre za metodološko izboljšavo Vasicekovega modela, ki omogoča empirično preverjanje brez predpostavke o normalni porazdelitvi, pa se model danes kaže kot omejujoč, saj ne more napovedati negativnih obrestnih mer, kar je stvarno že zadnjih nekaj let.

3.3.2 Merjenje parametrov CIR modela

Parametre CIR modela ocenjujemo podobno kot Vasicekov model z metodami GMM in metodami največjega verjetja. Zanimiv magisterij (Štampar, 2020) na temo empiričnega preverjanja CIR modela z metodo največjega verjetja, je bil opravljen tudi na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Na tem mestu opuščamo opis metodologije ocenjevanje parametrov CIR modela.

4 EMPIRIČNA ANALIZA OBRESTNIH MER Z MERTONOVIM MODELOM

Osrednji namen tega poglavja sledi temeljnim hipotezam naloge. Želimo namreč predstaviti smotnost rabe Mertonovega modela za napovedovanje kratkoročnih obrestnih mer, kadar so te negativne. Uporabili bomo podatke za desetletne državne obveznice nemške države glede na javno dostopne podatke iz obdobja zadnjih 10 let. Ob tem velja omeniti, da bi bilo atraktivno primerjati večjo skupino enofaktorskih modelov. Tovrstna primerjava presega zastavljen okvir v tej diplomski nalogi, zato smo osredinjeni le na najbolj osnovni enofaktorski model.

4.1 Empirično preverjanje modela

V tem poglavju bomo preverili diskretno verzijo enačbe Mertonovega modela

$$r(T) = r(t) + \alpha \times (T - t) + \varepsilon(T - t), \quad (6)$$

kjer simboli v enačbi pomenijo enako kot v enačbah (4) in (5): $r(t)$ je obrestna mera v času t , $\varepsilon(T - t)$ je stohastičen šum s pričakovano vrednostjo $E(\varepsilon(T - t)) = 0$ in s standardnim odklonom $\sigma = \sqrt{T - t}$. Standardni odklon σ predstavlja v enačbi 6 skupen standardni odklon stopenj sprememb obrestnih mer $dr(s)$ znotraj celotnega obdobja $[t, T]$. Empirični model (6) bomo preverili s pomočjo izračunavanja enačbe trenda na več smiselno določenih podobdobjih časovne serije podatkov o dnevni donosnosti desetletnih nemških državnih obveznic. Podatke za analizo prikazujemo v naslednjem poglavju.

Enačbo (6) empiričnega modela bomo preverjali z enostavno metodo analize trenda. Uporabili bomo enačbo trenda tako, da bo ta odražala značilnosti Mertonovega modela. Enačba trenda iz katere izhajamo ima naslednjo obliko:

$$X(t) = m(t) + \varepsilon(t), \quad (7)$$

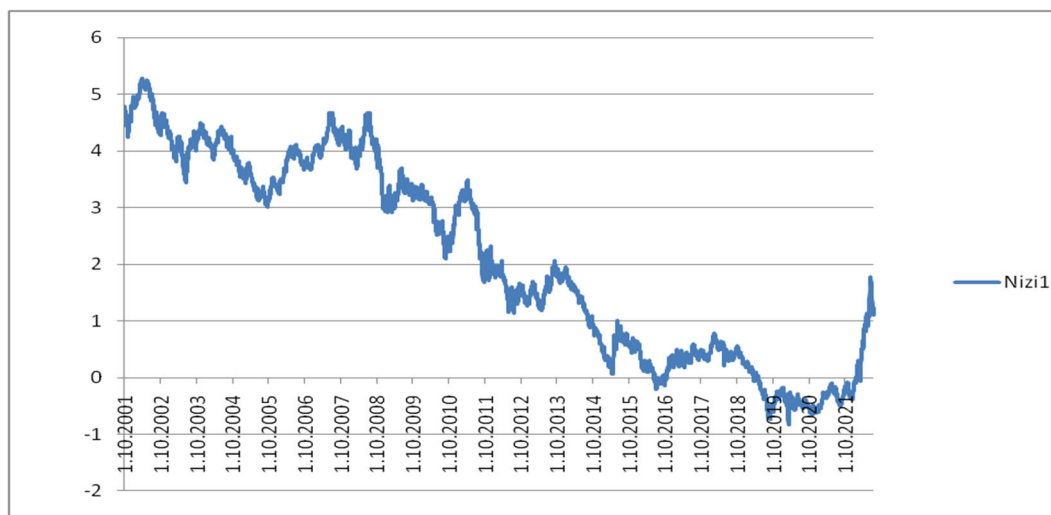
kjer je $m(t)$ enačba trenda $\alpha + \beta \times t$. Kot lahko Mertonovega modela. Ta ocena predstavlja konstantni člen linearne enačbe trenda. Hkrati lahko ugotovimo, da nam naklon β iz enačbe trenda predstavlja oceno parametra α iz Mertonovega modela. Napaka $\varepsilon(t)$ je v obeh primerih normalno porazdeljena slučajna spremenljivka s pričakovano vrednostjo 0. Zapišimo Mertonov model na način, kot ga bomo preverili s pomočjo enačbe trenda 7.

$$r(t) = \alpha + \beta \times t + \varepsilon(t) \quad (8)$$

Enačbo 8 bomo preverili z metodo najmanjših kvadratov na standardni način.

4.2 Predstavitev podatkov

V tem sklopu smo usmerjeni v predstavitev podatkov, s pomočjo katerih bomo preverjali v uvodu postavljene hipoteze. Odločili smo se za podatke o dnevni donosnosti desetletne nemške državne obveznice in, ker gre za standardno vrsto državne obveznice, so na voljo obsežni podatki. Dnevna donosnost desetletne nemške državne obveznice nam bo služila kot približek za višino kratkoročne obrestne mere. Dnevne podatke smo dobili iz javno dostopne baze podatkov Nemške centralne banke, podatki pa se nanašajo na podatke v obdobju med 1.10.2001 in 1.10.2021. Baza podatkov s katerimi bomo delali, vsebuje 5279 enot. Podatkov je nekoliko manj, ker ne vsebujejo dni, ko borza ni delovala. Podatki so prikazani v sliki 1.



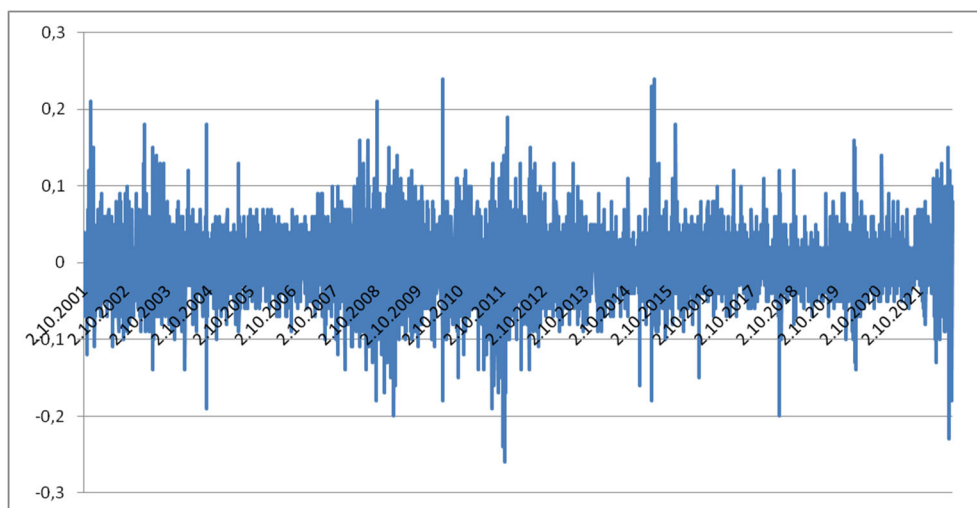
Slika 4: Dnevne donosnosti desetletnih nemških državnih obveznic. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Iz slike lahko vidimo splošen trend upadanja dnevne donosnosti desetletne državne nemške obveznice s posameznimi nihanji okrog trenda. Prikazano obdobje razvoja dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice lahko razdelimo v pet obdobij:

1. obdobje med 1.4.2002 in 1.10.2005: kot vidimo to obdobje zaznamuje trend padanja donosnosti, kar lahko povežemo z naraščanjem cen desetletne nemške državne obveznice. Razloga za rast cen ne poznamo, poleg tega pa za našo analizo ni relevanten.
2. obdobje med 1.10.2005 in 1.10.2007: sledi obraten trend, kar lahko prepišemo korekcijam donosnosti, ki se postopno vrne nazaj ravni iz prvega obdobja.
3. obdobje med 1.10.2007 in 1.10.2019: v tem celotnem obdobju beležimo izrazit trend padanja donosnosti, kar lahko povežemo s pripravljenostjo investorjev vlaganja v nemške obveznice, najprej skozi veliko svetovno finančno, gospodarsko krizo in nato še skozi veliko dolžniško krizo nekaterih držav evroobmočja. V tem obdobju je bila namreč desetletna nemška državna obveznica privlačen vir financiranja. Dvig in ponoven padec donosnosti obveznice morda lahko pripišemo negotovosti v zvezi z Brexitom.
4. obdobje med 1.10.2019 in 31.12.2021: V letu 2019 se zgodi padec dnevne donosnosti pod mejo nič odstotkov. To obdobje zaznamujejo negativne dnevne

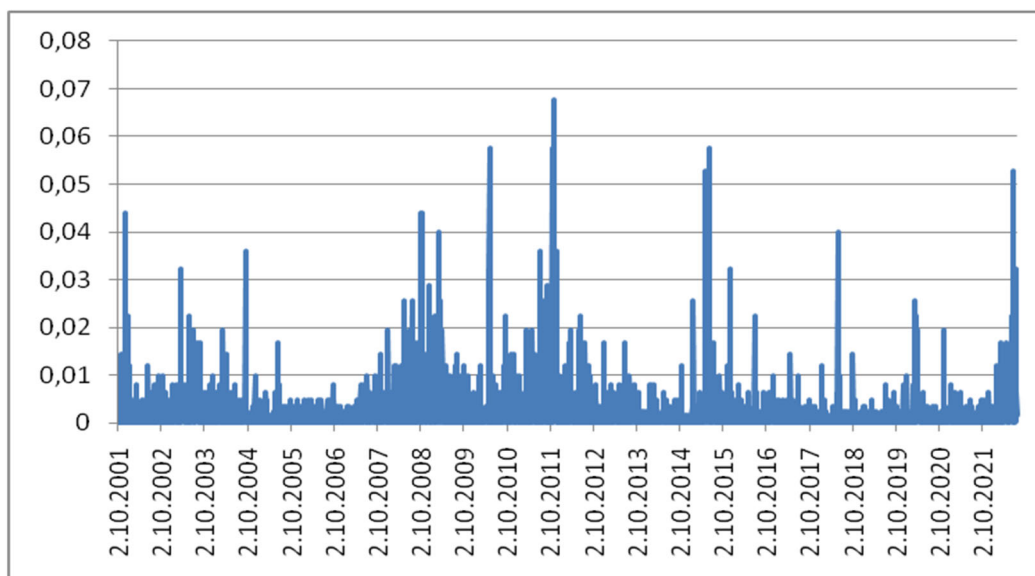
donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Razloge za to lahko iščemo v ekspanzivni monetarni politiki ECB – ja v zvezi z ukrepi povezanimi s povečevanju državnih izdatkov v obdobju pandemije.

5. obdobje med 1.1.2022 in 19.7.2022: donosnost se izrazito hitro vrne na pozitivno raven, kar lahko pripišemo zaključku ekspanzivne monetarne politike, kar jo zaznamuje zmanjševanje količine denarja v obtoku.



Slika 5: Dnevne spremembe dnevne donosnosti desetletnih nemških državnih obveznic. Opomba: preračunano iz časovne serije dnevni donosnosti. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Slika 5 prikazuje dnevne spremembe dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Vidimo, da je veliko nihanja, še posebej v obdobjih večjih nestabilnosti, torej v obdobju velike gospodarske krize in v obdobju pandemije.



Slika 6: Volatilnost dnevne spremembe dnevne donosnosti desetletnih nemških državnih obveznic. Opomba: preračunano iz časovne serije dnevni sprememb dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Slika 6 prikazuje dejansko mero za varianco spremembe dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice, v kateri so obdobja večjih nihanj še bolj jasno vidna. Večja nihanja pomenijo večje negotovosti, manjša pa manjše negotovosti. Največja negotovost je bila seveda v obdobju velike gospodarske krize in velike dolžniške krize evrskega denarnega območja, katerih vpliv vidimo tudi še med leti 2010 in 2015 z dvema večjima vrhovoma. V času pandemije je opaziti stabilno donosnost, a vseskozi v negativnem območju.

OPISNA STATISTIKA	STOPNJA DONOSNOSTI	SPREMEMBA DONOSNOSTI
Srednja vrednost	2,09	-0,0007
Mediana	1,89	0
Maksimum	5,28	0,24
Minimum	-0.83	-0,26

Varianca	3,12	0,002
Standardni odklon	1,77	0,04

Tabela 2: Opisne statistike dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Številke v tabeli so preračunane iz časovne serije dnevni sprememb dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Srednja vrednost dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice skozi celotno obdobje iz vzorca znaša približno 2,09%, medtem ko znaša srednja vrednost dnevne spremembe donosnosti v tem istem obdobju -0,0007 odstotnih točk. Najvišja in najnižja stopnja rasti dnevne donosnosti desetletne državne obveznice sta v tem obdobju znašali 5,28% in -0,83%. Največje povečanje v stopnji rasti dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice je znašalo 0,24 odstotnih točk, medtem ko je največji padec v tem istem obdobju znašal -0,26 odstotnih točk. Varianca in standardni odklop nakazujeta volatiliteto dnevne donosnosti te obveznice. Varianca donosnosti je približno 3,12 (standardni odklon znaša 1,77 odstotnih točk), medtem ko je varianca spremembe donosnosti približno 0,002 (standardni odklon znaša 0,04 odstotne točke).

4.3 Rezultati empirične analize

4.3.1 Analiza za celotno obdobje gibanja dnevne donosnosti nemške državne obveznice

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	4,869	manj od 0,05
β	-0,023	manj od 0,05
skupna pojasnjena varianca	0,895	

standardni odklon	1,765
-------------------	-------

Tabela 3: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Številke v tabeli so preračunane iz časovne serije dnevni sprememb dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Na podlagi rezultatov regresijske analize prilagojene enačbe Mertonovega modela (enačba 8) lahko ugotovimo padanje pričakovane stopnje dnevne donosnosti nemške desetletne državne obveznice in sicer pričakovana stopnja donosnosti pada od ocenjene začetne stopnje 4,869 odstotka za vsak mesec v povprečju za 0,023 odstotne točke (kolikor znaša naklon krivulje trenda, parameter β oz. potisk). Kot lahko vidimo iz stopnje značilnosti sta obe vrednosti regresijskih koeficientov α in β močno statistično značilni, kar pomeni, da ne moremo reči, da v tem preučevanem obdobju ni prisotnega časovnega trenda. S to prilagojeno Mertonovo enačbo trenda smo pojasnili približno 90% nihanja okoli trenda.

4.3.2 Analiza za izbrana pododobja sprememb v trendu gibanja dnevne donosnosti nemške državne obveznice

V tem sklopu preverimo prilagojen Mertonov model tudi na zgoraj razdeljenih obdobjih. Le ta so:

1. obdobje med 1.4.2002 in 1.10.2005
2. obdobje med 1.10.2005 in 1.10.2007
3. obdobje med 1.10.2007 in 1.10.2019
4. obdobje med 1.10.2019 in 31.12.2021
5. obdobje med 1.1.2022 in 19.7.2022

Dobimo pet različnih enačb trenda, rezultate prikazujejo naslednje tabele.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	4,805	manj od 0,05
β	-0,035	manj od 0,05
skupna pojasnjena varianca	0,73	
standardni odklon	0,517	

Tabela 4: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: obdobje med 1.4.2002 in 1.10.2005. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Na podlagi rezultatov regresijske analize prilagojene enačbe Mertonovega modela (enačba 8) lahko ugotovimo padanje pričakovane stopnje dnevne donosnosti nemške desetletne državne obveznice in sicer pričakovana stopnja donosnosti pada od ocenjene začetne stopnje 4,805 odstotka za vsak mesec v povprečju za 0,035 odstotne točke (kolikor znaša naklon krivulje trenda, parameter β oz. potisk). Kot lahko vidimo iz stopnje značilnosti sta obe vrednosti regresijskih koeficientov α in β močno statistično značilni, kar pomeni, da ne moremo reči, da v tem preučevanem obdobju ni prisotnega časovnega trenda. S to prilagojeno Mertonovo enačbo trenda smo pojasnili približno 73% nihanja okoli trenda.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	3,34	manj od 0,05
β	0,043	manj od 0,05
skupna pojasnjena varianca	0,78	
standardni odklon	0,359	

Tabela 5: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: obdobje med 1.10.2005 in 1.10.2007. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Na podlagi rezultatov regresijske analize prilagojene enačbe Mertonovega modela (enačba 8) lahko ugotovimo padanje pričakovane stopnje dnevne donosnosti nemške desetletne državne obveznice in sicer pričakovana stopnja donosnosti pada od ocenjene začetne stopnje 3,34 odstotka za vsak mesec v povprečju za 0,043 odstotne točke (kolikor znaša naklon krivulje trenda, parameter β oz. potisk). Kot lahko vidimo iz stopnje značilnosti sta obe vrednosti regresijskih koeficientov α in β močno statistično značilni, kar pomeni, da ne moremo reči, da v tem preučevanem obdobju ni prisotnega časovnega trenda. S to prilagojeno Mertonovo enačbo trenda smo pojasnili približno 78% nihanja okoli trenda. Glede na obdobje med 1.10.2002 in 1.10.2005 (tabela 4), zaznamo v tem obdobju precejšnjo spremembo v trendu, saj se krivulja ocenjene pričakovane vrednosti enodnevnega donosnosti prilagojenega Mertonovega modela obrne navzgor.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	3,85	manj od 0,05
β	-0,031	manj od 0,05
skupna pojasnjena varianca	0,902	
standardni odklon	1,380	

Tabela 6: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: obdobje med 1.10.2007 in 1.10.2019. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Na podlagi rezultatov regresijske analize prilagojene enačbe Mertonovega modela (enačba 8) lahko ugotovimo padanje pričakovane stopnje dnevne donosnosti nemške desetletne državne obveznice in sicer pričakovana stopnja donosnosti pada od ocenjene

začetne stopnje 3,85 odstotka za vsak mesec v povprečju za 0,031 odstotne točke (kolikor znaša naklon krivulje trenda, parameter β oz. potisk). Kot lahko vidimo iz stopnje značilnosti sta obe vrednosti regresijskih koeficientov α in β močno statistično značilni, kar pomeni, da ne moremo reči, da v tem preučevanem obdobju ni prisotnega časovnega trenda. S to prilagojeno Mertonovo enačbo trenda smo pojasnili približno 90% nihanja okoli trenda. Glede na obdobje med 1.10.2005 in 1.10.2007 (tabela 5), ponovno zaznamo v tem obdobju spremembo v trendu, saj se krivulja ocenjene pričakovane vrednosti enodnevne donosnosti prilagojenega Mertonovega modela obrne vnovič navzdol.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	-0,49	manj od 0,05
β	0,003	0,193
skupna pojasnjena varianca	0,067	
standardni odklon	0,119	

Tabela 7: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: obdobje med 1.10.2019 in 31.12.2021. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Na podlagi rezultatov regresijske analize prilagojene enačbe Mertonovega modela (enačba 8) lahko ugotovimo, da čas t ni več dejavnik spreminjanja dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Zgodi se namreč, da regresijski koeficient β (potisk) ni več statistično značilen (stopnja značilnosti je večja od najmanjše še dopustne meje 0,05). Kot vidimo s prilagojenim Mertonovim modelom v tem obdobju ne moremo pojasniti več kot 6,7% spreminjanja v stopnji dnevne donosnosti desetletne državne obveznice. Iz podatkov lahko razberemo, da je stopnja enodnevne donosnosti v tem obdobju bila ves čas negativna s približno ničelnim trendom oz. potiskom.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	-0,5	manj od 0,05
β	0,31	manj od 0,05
skupna pojasnjena varianca	0,97	
standardni odklon	0,580	

Tabela 8: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: obdobje med 1.1.2022 in 19.7.2022. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Na podlagi rezultatov regresijske analize prilagojene enačbe Mertonovega modela (enačba 8) lahko ugotovimo, da je čas t tokrat izrazito močan dejavnik z zelo visokim koeficientom β (potisk), ki je ponovno statistično značilen (stopnja značilnosti je manjša od 0,05). Stopnja dnevne donosnosti desetletne državne obveznice strmo raste (za vsak mesec za približno 0,31 odstotne točke). Kot vidimo s prilagojenim Mertonovim modelom v tem obdobju pojasnimo kar približno 97% spreminjanja v stopnji dnevne donosnosti desetletne državne obveznice, kar navaja na to, da ji bil porast izrazito strm in z majhnim nihanjem.

5 ZAKLJUČNO POGLAVJE

V zaključnem poglavju bomo poskušali odgovoriti na v uvodu zastavljeni temeljni hipotezi diplomske naloge. Ti dve hipotezi sta:

1. z enofaktorskim Mertonovim modelom ne bomo mogli natančno napovedati obrestnih mer v evrskem denarnem območju v obdobjih večjih gospodarskih nihanj.
2. z enofaktorskim Mertonovim modelom ne bomo mogli napovedati negativnih obrestnih mer evrskega denarnega območja.

5.1 Preverjanje temeljnih hipotez

Prva hipoteza se nanaša na preučevanje napovedne moči Mertonovega modela v evrskem denarnem območju v obdobju večjih gospodarskih nihanj. To hipotezo bomo preverili s pomočjo napovedi donosnosti desetletne nemške državne obveznice v tretjem podobdobju in sicer med 1.10.2007 in 1.10.2019. To obdobje smo izbrali zato, ker izkazuje največjo stopnjo nihanja (volatilnosti) glede na standardni odklon. Rezultati empirične analize Mertonovega modela na tem podobdobju za dnevno donosnost desetletne nemške državne obveznice, so prikazani v tabeli 6. Hipotezo bomo preverili na način, da bomo ponovili analizo na skrajšani časovni seriji za deset podatkov. Nato bomo rezultate te analize uporabili za napoved teh deset vrednosti in primerjali rezultate po napovedih z pravimi podatki.

Enačba modela za tretje podobdobje: $r(t) = 3,895 - 0,03227 \times t + \varepsilon(t)$			
Ocenjena vrednost (brez $\varepsilon(t)$)	Šum	Ocenjena vrednost s šumom $\varepsilon(t)$	Prava vrednost
-0,494	3,807	3,313	0,13

-0,526	30,038	29,512	0,06
-0,558	17,176	16,618	0,01
-0,590	-4,537	-5,127	-0,04
-0,622	-32,414	-33,036	-0,13
-0,655	19,471	18,815	-0,31
-0,687	11,756	11,068	-0,39
-0,719	-7,211	-7,930	-0,65
-0,751	-0,598	-1,349	-0,59
-0,784	-5,366	-6,149	-0,47

Tabela 9: Napovedovanje dnevne donosnosti s pomočjo podatkov tretjega podobdobja.

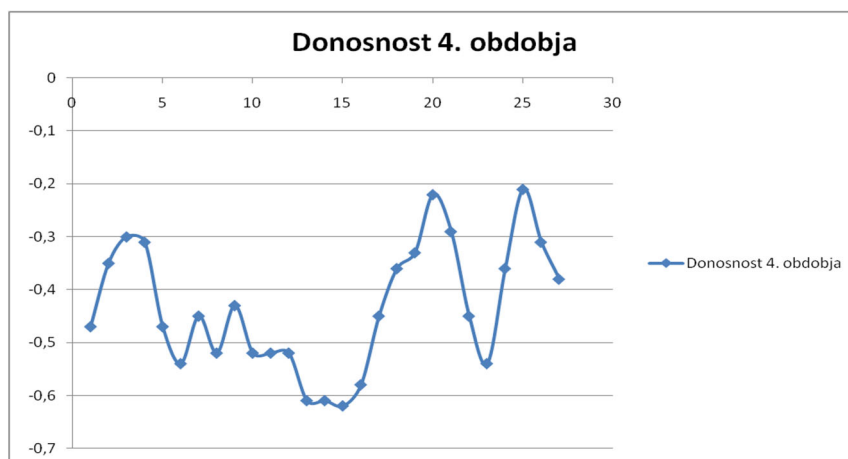
Iz tabele 9 lahko opazimo velika odstopanja med vrednostmi s šumom in pravimi vrednostmi. Razlog je v dolžini časovne serije, s katero ocenjujemo model in v visoki stopnji nihanja dnevne donosnosti desetletne državne obveznice v tem obdobju. Daljše kot je obdobje napovedovanja vnaprej glede na začetno obdobje časovne vrste podatkov na katero se nanaša ocena modela, manj natančna je napoved. Da je temu res tako pokažimo še na krajšem podobdobju z manj nihanja. Izbrali smo peto podobdobje, ki smo ga skrajšali za eno časovno enoto, to pa zato, ker želimo prikazati, da kadar napovedujemo za manj obdobj vnaprej na časovni seriji, ki ima manj nihanja, takrat je analiza s pomočjo Mertonovega modela bolj natančna. Rezultati so prikazani v tabeli 10.

Enačba modela za tretje podobdobje: $r(t) = -0,419 + 0,273 \times t + \varepsilon(t)$			
Ocenjena vrednost (brez $\varepsilon(t)$)	Šum	Ocenjena vrednost s šumom $\varepsilon(t)$	Prava vrednost
1,219	1,633	2,852	1,45

Tabela 10: Napovedovanje dnevne donosnosti s pomočjo podatkov petega podobdobja.

Tabela 10 se nanaša na peto podobdobje, ki ga tvori šest časovnih enot o dnevni donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Oceno kakovosti napovedane dnevne donosnosti zato opravimo zgolj za eno, zadnjo časovno enoto petega podobdobja. S primerjavo tabel 9 in 10 ugotovimo, da je natančnost ocenjene vrednosti s šumom v tabeli 9 precej manjša, kot v tabeli 10 glede na pravo vrednost dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. S tem smo zaokrožili argument o tem, zakaj je napovedovanje obrestnih mer (donosnosti) s pomočjo Mertonovega modela v daljših časovnih obdobjih in obdobjih z večjo volatilnostjo manj primerno. S tem smo pritrdili hipotezi 1 zastavljeni v uvodu te diplomske naloge.

Druga hipoteza predvideva preverjanje napovedne moči prilagojenega empiričnega Mertonovega modela za okoliščine kadar imamo negativne obrestne mere. Analiza bo ponovno opravljena na dnevni donosnosti desetletne nemške državne obveznice in sicer na enaki časovni vrsti, kot v primeru prve hipoteze. Po podatkih sodeč se negativne obrestne mere pojavijo v letu 2016 nakar sledi izrazit porast, ki traja do leta 2019, ko obrestne mere ponovno postanejo negativne in ostanejo take dlje časa. Poglejmo najprej na četrto podobdobje, ki ga zaznamujejo negativne donosnosti. Sliko dnevne donosnosti desetletne državne obveznice v tem podobdobju prikazuje slika 7:



Slika 7: Dnevna donosnost nemške državne obveznice. Slika prikazuje podatke za 4. podobdobje. Podatki so preračunani iz časovne serije dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Že iz slike lahko vidimo, da je obdobje negativnih obrestnih mer izrazito negotovo in izkazuje praktično ničelni trend. To nakazuje na prisotnost nekaterih dodatnih nepredvidljivih dejavnikov na ocene vlagateljev o vrednosti nemške državne obveznice, kar je drugačno obnašanje donosnosti glede na pretekla podobdobja, ki jih zaznamuje izrazit trend upadanja z relativno majhnimi nihanji okrog trenda. To pripisujemo predvidevanju, da so bili pri prejšnjih obdobjih prisotni v času bolj predvidljivi dejavniki. Skušajmo izluščiti analizo hipoteze 2 s prilagojenim Mertonovim modelom na podatkih iz zgornje slike oz. četrtega podobdobja.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	-0,464	manj od 0,05
β	0,01	0,778
skupna pojasnjena varianca	0,004	
standardni odklon	0,118	

Tabela 11: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: skrajšano obdobje med 1.10.2019 in 31.12.2021
Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Analizo hipoteze 2 opravimo na skrajšani seriji podatkov četrtega podobdobja. Serijo smo skrajšali za pet časovnih enot zaradi tega, ker želimo oceniti natančnost napovedovanja s pomočjo Mertonovega modela na območju negativnih obrestnih mer na obdobju petih časovnih enot. Na podlagi rezultatov v tabeli 10 lahko vidimo, da je regresijski parameter beta, ki označuje naklon potiska statistično neznačilen, saj je stopnja značilnosti večja od 0,05. To pomeni, da v tem primeru čas ni dejavnik spreminjanja donosnosti, torej je ta tip Mertonovega modela na teh podatkih

neuporaben. S tem smo nakazali na možnost, da bi lahko bil Mertonov model manj uporaben za napovedovanje enodnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice, kadar imamo podatke, ki so zelo razpršeni okrog trenda. Za dokončen sklep veljavnosti hipoteze dva, dajmo opraviti še podobno regresijsko analizo na dopolnjenih podatkih. Združili bomo tretje in četrto obdobje.

PARAMETER	VREDNOST	STOPNJA ZNAČILNOSTI
α	0,715	manj od 0,05
β	-0,014	manj od 0,05
skupna pojasnjena varianca	0,676	
standardni odklon	0,254	

Tabela 12: Regresijski koeficienti Mertonovega modela za oceno dnevne donosnosti desetletne nemške državne obveznice: skrajšano obdobje med 1.7.2014 in 1.12.2021. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

Rezultati v tabelah 11 in 12 se nanašajo na obdobje med julijem 2014 in decembrom 2021. Obdobje smo skrajšali za pet časovnih enot. Tabela 11 prikazuje rezultate empirične analize s pomočjo Mertonovega modela na skrajšanem obdobju. Časovno serijo smo skrajšali zato, da bomo primerjali ocenjene vrednosti za zadnjih pet časovnih enot s tapravimi vrednostmi. S tega lahko sklepamo na nenatančnost napovedovanja negativnih obrestnih mer s pomočjo Mertonovega modela. Iz tabele 11 vidimo, da sta regresijska koeficienta α in β statistično značilna (njuna stopnja značilnosti je manjša od 0,05). Izračun napovedanih donosnosti za preostalih pet časovnih enot pokaže, da smo približno zadeli samo vrednost za zadnjo časovno enoto, medtem, ko smo vse ostale zelo zgrešili (primerjamo pravo vrednostjo z ocenjeno vrednostjo s šumom). Če združimo analizo druge hipoteze, lahko sklenemo, da je Mertonov model izrazito neprimeren za ocenjevanje donosnosti, kadar so v podatkih prisotne spremembe v trendih med pozitivnimi in negativnimi obrestnimi merami. S tem ugotovimo, da je hipoteza dva primerno postavljena (ne moremo je zavrnil).

Enačba modela za tretje podobdobje: $r(t) = 0,715 - 0,014 \times t + \varepsilon(t)$			
Ocenjena vrednost (brez $\varepsilon(t)$)	Šum	Ocenjena vrednost s šumom $\varepsilon(t)$	Prava vrednost
-0,559	2,807	2,248	-0,54
-0,573	6,192	5,619	-0,36
-0,587	0,810	0,223	-0,21
-0,601	8,893	8,292	-0,31
-0,615	0,032	-0,582	-0,38

Tabela 12: Napovedovanje dnevne donosnosti s pomočjo podatkov za obdobje med 1.7.2014 in 1.12.2021. Vir podatkov: Nemška centralna banka, 2022.

5.2 Implikacije za nosilce monetarne politike

Implikacije za monetarno politiko, ki izhajajo iz vsebine diplomske naloge lahko povzamemo v naslednjih alinejah.

- Obrestne mere so pomemben alokator finančnih virov na finančnih trgih za potrebe financiranja investicijskih naložb ter spodbujanja zadolževanja držav. Vlagatelji na finančnih trgih lahko zahtevajo relativne visoke stopnje donosnosti, ki presegajo stroške najema kapitala pri finančnih institucijah (*obrestna mera + ostali stroški povezani z najemom kredita*);
- Ob tem da obrestne mere alocirajo finančne vire na finančnih trgih, pa so v veliki meri odvisne od potreb podjetij po investicijah. Spreminjanje obrestnih se lahko zgodi neodvisno od fiskalne in monetarne politike;
- Obrestne mere imajo pomemben učinek na potrošnjo;
- Ob centralni banki lahko tudi države s politikami zadolževanja pomembno vplivajo na spreminjanje obrestnih mer;

- Negativne obrestne mere lahko ogrožajo stabilnost bančnega sistema;
- Pri obrestnih merah je treba upoštevati tudi »živalske instinkte«, ki lahko imajo ključno vlogo pri odločanju o investiranju;
- Obrestne mere so zelo volatilne, nanje vpliva veliko dejavnikov (to povečuje kompleksnost njihovega spreminjanja), zato jih je zelo težko napovedovati.

6 SKLEP

Na tem mestu podajam ključne ugotovitve glede na postavljene cilje ter raziskovalni tezi, do katerih smo prišli na podlagi naše raziskave v teoretičnem in empiričnem delo raziskave.

Prvi cilj je bil prikazati in analizirati nekaj referenčne literature za raziskovanje pomena obrestnih mer za gospodarstvo. Cilj smo izpolnili v predvsem v drugem poglavju, ko smo govorili o pomenu obrestnih mer na gospodarstvo z dejavniki, kot so potrošnja gospodinjstva, investicije, zadolževanje države, ipd.

Drugi cilj je bil prikazati nekatere osnovne empirične modele merjenja in napovedovanja obrestnih mer. Cilj smo izpolnili v tretjem poglavju, kjer smo bili osredinjeni na enofaktorske osnovne verzije modelov časovnih serij.

Naslednji cilj je bil pregled nekaterih temeljnih javno dostopnih podatkovnih virov, ki lahko služijo za spremljanje spreminjanja obrestnih mer v gospodarstvu. Ta cilj smo izpolnili v četrtem poglavju v četrtem poglavju pri predstavitvi temeljnih podatkov, deloma pa tudi v drugem poglavju, ko smo predstavljali razvoj obrestnih mer v času in povezavo med spremembami obrestne mere in gospodarsko aktivnostjo.

Zaznati in osvetliti smo želeli tudi nekatere temeljne dejavnike za pojav negativnih obrestnih mer. To smo storili v poglavju 2.5, ki smo ga v celoti namenili pojavu negativnih obrestnih mer in nekaterim razlogom za njihov pojav.

Zadnji cilj je bil uporabiti empirično metodo za analizo časovnih vrst na Mertonovem (1973) empiričnem modelu napovedovanja obrestnih mer, kar smo izpolnili v četrtem poglavju, ki je v celoti namenjeno empirični analizi.

Osrednja nit diplomske naloge je bila preveriti dve temeljni hipotezi, da:

1. z enofaktorskim Mertonovim modelom ne bomo mogli natančno napovedati obrestnih mer v evrskem denarnem območju v obdobjih večjih gospodarskih nihanj in
2. z enofaktorskim Mertonovim modelom ne bomo mogli napovedati negativnih obrestnih mer evrskega denarnega območja.

Obe hipotezi smo preverili z analizo moči Mertonovega modela za napovedovanje kratkoročnih do srednjeročnih donosnosti na podlagi podatkov o gibanju dnevne donosnosti desetletne državne nemške obveznice. Nobene hipoteze nismo zavrnil. Izkazalo se je, da je Mertonov model še posebej neprimeren v obdobjih večjih gospodarskih nihanj, še posebej, če ta trajajo dlje časa in se vmes zgodi več sprememb v trendu. Ob preverjanju prve hipoteze se izkaže, da so bile ocene obrestnih mer s pomočjo Mertonovega modela na daljši časovni seriji zelo nenatančne (veliko nihanja in veliko sprememb v trendu), na nekoliko krajših (manj nihanja in brez spremembe v trendu) pa nekoliko bolj natančne. Za bolj natančne ocene obrestnih mer je potrebno uporabiti bogatejše modele (modele z več spremenljivkami, ki lahko zajamejo vplive različnih dejavnikov na obrestne mere).

Drugo hipotezo pa smo preverjali na obdobju izrazitejših nihanj (višja negotovost glede gibanja obrestnih mer) in negativnih obrestnih mer. Izkazalo se je, da s pomočjo Mertonovega modela zavrremo tudi drugo hipotezo, saj so bili regresijski koeficienti v Mertonovem modelu neznačilni.

Z modelom ne moremo ločiti med pozitivnimi in negativnimi obrestnimi merami, ampak je napoved odvisna od tega, ali smo v naraščajočem ali padajočem trendu. Več kot je nihanja okrog trenda, manjša je natančnost napovedovanja obrestnih mer.

Glede na zgoraj napisano in glede na opravljeno empirično analizo na Mertonovem modelu lahko ugotovimo, da so obrestne mere zelo volatilne, torej se spreminjajo zelo hitro, tudi kadar se nanašajo na stabilne finančne instrumente, kot je desetletna državna nemška obveznica. To kaže na kompleksnost napovedovanja obrestnih mer posebej kadar želimo napovedovati za več časovnih enot naprej.

7 REFERENCE

- Akram, Tanweer; Das, Anupam. 2017. The dynamics of Government bond yields in the euro zone. *Annals of Financial Economics* 12, št. 3: 1750011
- Alvarez, Fernando; Lucas, Robert E.; Weber, Warren E. 2001. Interest rates and inflation. *American Economic Review* 91, št. 2: 219 – 225.
- Barro, Robert J. 2005. Government Spending, Interest Rates, Prices, and Budget Deficits in the United Kingdom. *Journal of monetary economics* 20, št. 2: 221 – 247
- Bencek, Jadranka. 2010. Obrestna mera – vrste in funkcije, diplomsko delo. Maribor: Ekonomsko – poslovna fakulteta.
- Bernanke, Ben S.; Gertler, Mark. 1995. Inside the black box: The credit channel of monetary policy transmission. *Journal of Economic perspectives* 9, št. 4: 27 – 48.
- Black, Fischer; Scholes, Mayron. 2019. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* 81, št. 3: 637 – 654
- Campbell, John Y.; Mankiw, N. Gregory. 1989. Consumption, income, and interest rates: Reinterpreting the time series evidence. *NBER Macroeconomics Annual*, št. 4: 185 – 216.
- Chan, Ka – keung Ceajer; Karolyi, Andrew G.; Longstaff, Francis A.; Sanders, Anthony B. 1992. An empirical comparison of alternative models of the short – term interest rate. *The journal of finance* 47, št. 3: 1209 – 1227.
- Cox, John C.; Ingersoll Jr, Jonathan E.; Ross, Stephen A. 2005. A theory of the term structure of interest rates. *Theory of valuation*, 129 – 164.
- Dotsey, Michael. 1998. The predictive content of the interest rate term spread for future economic growth. *FRB Richmond Economic Quarterly* 84, št. 3: 31 – 51.
- ECB. 2022. Statistical Data Warehouse. Long – term interest rates statistics. Evropska centralna banka. <https://sdw.ecb.europa.eu/browse.do?node=9691124> (pridobljeno 21.7.2022).
- Eisenshmidt, Jens; Smets, Frank. 2019. Negative interest rates: Lessons from the euro area. *Series on Central Banking Analysis and Economic Policies*, št. 26
- Eurostat. 2022. Data Browser. <https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/tec00127/default/table?lang=en> (pridobljeno 23.7.2022)

- Flannery, Mark J.; James, Christopher M. 1984. The effect of interest rate changes on the common stock returns of financial institutions. *The Journal of Finance* 39, št. 4: 1141 – 1153.
- Gambacorta, Leonardo. 2008. How do banks set interest rates? *European Economic Review* 52, št. 5: 792 – 819.
- Hall, Robert E.; Jorgenson, Dale W. (1967). Tax policy and investment behavior. *The American Economic Review* 57, št. 3: 391 – 414.
- Hamilton, James D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Ho, Thomas S.; Lee, Sang B. 1986. Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance* 41, št. 5: 1011 – 1029.
- Homer, Sidney; Sylla, Richard. E. 1996. *A history of interest rates*. Rutgers University Press.
- Hull, John; White, Alan. 1990. Pricing interest – rate – derivative securities. *The review of financial studies* 3, št. 4: 573 – 592.
- Keynes, John Maynard. 1957. *The general theory of employment interest and money*. London: MacMillan.
- Koedijk, Kees G.; Nissen, Francois G.; Schotman, Peter C.; Wolff, Christian C. P. 1997. The dynamics of short – term interest rate volatility reconsidered. *Review of Finance* 1, št. 1: 105 – 130.
- Lane, Kevin; Rosewall, Tom. 2015. Firms' investment decisions and interest rates. *RBA Bulletin*, 1 – 7.
- Ljami, Edina. 2016. *Obrestna mera kot dejavnik kreditne dejavnosti bank* (diplomski projekt). Maribor: Ekonomsko – poslovna fakulteta.
- Mankiw, Gregory N. 2010. *Macroeconomics*, 7. New York: Worth Publishers.
- McManus, Des; Watt, David. 1999. Estimating one – factor models of short – term interest rates. *Bank of Canada Working Paper* 99 – 18.
- Merton, Robert C. 1973. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science* 4, št. 1: 141 – 183.
- Mueller, Glenn; Pauley, Keith. 1995. The effect of interest – rate movements on real estate investment trusts. *Journal of Real Estate Research* 10, št. 3: 319 – 325.
- Murphy, Daniel; Walsh, Kieran J. (2022). Government spending and interest rates. *Journal of International Money and Finance*, št. 123, 102598.

- Nemška centralna banka, 2022. Dnevne donosnosti državnih obveznic. <https://www.bundesbank.de/en/statistics/money-and-capital-markets/interest-rates-and-yields/daily-yields-of-current-federal-securities-772220> (pridobljeno 20.7.2022).
- Nucera, Federico, Lucas A.; Schaumburg, Julia; Schwaab, Bernard. 2017. Do negative interest rates make banks less safe?. *Economics Letters*, št. 159: 112 – 115.
- Reilly, Frank K.; Wright, David J.; Johnson, Robert R. 2007. Analysis of the interest rate sensitivity of common stocks. *The Journal of Portfolio Management* 33, št. 3: 85 – 107.
- Reinhart, Carmen M.; Rogoff, Kenneth. S. (2008). This time is different: A panoramic view of eight centuries of financial crises, št. 13882. National Bureau of Economic Research.
- Samuelson, Paul A. 1945. The effect of interest rate increases on the banking system. *The American Economic Review* 35, št. 1: 16 – 27.
- Sørensen, Christoffer K.; Werner, Thomas. 2006. Bank interest rate pass – through in the euro area: a cross country comparison. ECB working paper, št. 580.
- Stawska, Joann; Miszczyńska, Katarzyana. 2017. The Impact of the European Central Bank's Interest Rates on Investments in the Euro Area. *Gospodarka Narodowa. The Polish Journal of Economics*, 291 št. 5 str: 51 – 72.
- Štampar, Ines. 2020. Stohastično modeliranje obrestnih mer (magistrsko delo). Maribor: Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za matematiko in računalništvo
- Weber, Warren E. 1970. The effect of interest rates on aggregate consumption. *The American Economic Review* 60, št. 4: 591 – 600.
- Wikipedija, 2022a. Wienerjev proces. https://en.wikipedia.org/wiki/Wiener_process (pridobljeno 28.7.2022).
- Wikipedija, 2022b. Brownovo gibanje. https://en.wikipedia.org/wiki/Brownian_motion (pridobljeno 28.7.2022).

Povzetek

Avtorica je v diplomskem delu s pomočjo statističnih podatkov o dnevni obrestni meri (dnevne donosnosti) desetletne državne nemške obveznice preverila uporabnost Mertonovega modela za napovedovanje obrestnih mer. Ob tem je raziskala nekaj obstoječih študij, ki obravnavajo in dokazujejo povezavo med obrestnimi merami in gospodarsko aktivnostjo in predstavila nekatere temeljne modele napovedovanja obrestnih mer. Mednarodne raziskave se že s tem ukvarjajo, med tem, ko je v Sloveniji to področje relativno slabo raziskano in podcenjeno. Avtorica je na to temo našla zgolj eno magistrsko nalogo s področja matematike in eno diplomsko delo s področja ekonomije. Mertonov model je bil uporabljen na podatkih za 20 let in sicer na dnevni donosnosti prvega v mesecu in s pomočjo programskega orodja Excel. Obdobje je bilo razdeljeno v štiri podobdobja za kvalitetnejšo sodbo o primernosti uporabe Mertonovega modela za napovedovanja obrestnih mer. Skozi vso nalogo so obrestne mere razumljene kot donosnost obveznic na finančnih trgih in ne, kot obrestne mere, ki jih tradicionalno razumemo pri kreditnem poslovanju z bankami. Avtorica je preverila dve hipotezi, ki se obe nanašata na uporabnost Mertonovega modela, pri čemer je ugotovila, da je Mertonov model kvečjemu uporaben za napovedovanje kratkoročnih obrestnih mer na krajših časovnih serijah kadar je v podatkih manj nihanja, medtem ko na daljših časovnih serijah za napovedovanje dlje v naprej Mertonov model ni primeren tudi, kadar je v podatkih manj nihanj.

Ključne besede: obrestne mere, Mertonov model, državna obveznica, empirična analiza

Summary

SINGLE – FACTOR INTEREST RATE FORECASTING MODELS: A REVIEW OF THE MODELS AND AN EMPIRICAL ANALYSIS OF INTEREST RATE WITH THE MERTONS' MODEL

In her thesis, the author verified the applicability of Merton's model for predicting interest rates by using statistical data on daily interest rates (daily yields) of ten-year German government bonds. At the same time, she investigated some existing studies that discuss and prove the connection between interest rates and economic activity and presented some fundamental models for forecasting interest rates. There are many international studies on this topic, while in Slovenia this area is relatively poorly studied. The author found only one master's thesis in the field of mathematics and one diploma thesis in the field of economics on this topic. In the present thesis, the Merton model was applied to 20 years of data, namely the daily returns on the first of the month, using the Excel software. The period was divided into four sub periods for a better judgment regarding the appropriateness of using the Merton model for forecasting interest rates. Throughout the diploma thesis, interest rates are understood as the yield of bonds on the financial markets and not as interest rates traditionally understood in credit transactions with banks. The author tested two hypotheses, which both refer to the applicability of the Merton model. She found that the Merton model is at most used to predict short-term interest rates on shorter time series when there are smaller fluctuations in the data, while it is inappropriate for longer time series, even when there is lower fluctuation in the data.

Keywords: interest rates, Merton model, government bond, empirical analysis